ÁLGEBRA LINEAL

EXAMEN FINAL **18 de Enero de 2010**

Apellidos y Nombre: ______________________________

Duración del examen: 3 horas

Publicación de notas: 25 enero 2010

Revisión de Examen: 1 feb 2010

Ejercicio 1. *(2 puntos)*

a) *(0,5 puntos) Estudia si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando debidamente la respuesta.*

Sean $A_{n\times n}$ ***y*** $B_{n\times n}$ ***dos matrices de*** $n\times n$ ***tales que se verifica que*** $A = 5B$***. Si A es diagonalizable con autovalores no nulos*** $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$***, entonces B es diagonalizable con autovalores*** $5\lambda_1, \cdots, 5\lambda_n$***.***

Respuesta*: FALSO: Sea* $\lambda \in \mathbf{R}$ *un autovalor de* A*, y* $v \in \mathbf{R}^n$ *el autovector asociado a* λ*, es decir* $Av = \lambda x$*. Si multiplicamos la expresión anterior por* $\frac{1}{5}$*, se obtiene* $\frac{1}{5}Av = \frac{\lambda}{5}x \Rightarrow Bv = \frac{\lambda}{5}x \Rightarrow$ *los autovalores de* B *son de la forma* $\frac{\lambda}{5}$*, y* $5\lambda \neq \frac{\lambda}{5}$ *pues* $\lambda \neq 0$*.*

b) *(0,5 puntos) Estudia si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando debidamente la respuesta.*

Sea $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^5$ ***una aplicación lineal. Si la matriz asociada a*** T ***en las bases canónicas tiene*** 3 ***columnas pivote, entonces*** T ***es inyectiva.***

Respuesta*: VERDADERO:*

$$dim(nulT) + dim(ImT) = 3$$

como $dim(ImT) = 3 =$ *número de columnas pivote* $\Rightarrow dim(nulT) = 0 \Rightarrow$ *inyectiva.*

c) $(0,5$ puntos) Sea $A_{3\times 3}$ una matriz de 3×3 tal que $det(A)=7$. Calcula $det(A^3)$ y $det(3A)$.

Respuesta: *$det(A^3)=7^3=343$ y $det(3A)=3^3 7=189$.*

d) $(0,5$ puntos) Dada la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ a & b\end{bmatrix}$, calcula el valor de a y b si $\lambda=1$ y $\lambda=5$ son valores propios de dicha matriz.

Respuesta: *Si $\lambda=1$ y $\lambda=5$ son valores propios de la matriz dada entonces, su polinomio característico será:*

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ a & b-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-5)\Leftrightarrow \lambda^2-(1+b)\lambda+(b-3a)=\lambda^2-6\lambda+5$$

Igualando coeficientes obtenemos $a=0$ y $b=5$

Ejercicio 2. *(2 puntos)*

Sabiendo que

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\\ 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4\\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9\\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

donde el simbolo $\sim$ denota que las dos matrices son equivalentes por filas, calcula:

a) (0,4 puntos) la forma escalonada reducida de A.

Respuesta: *Sumando a la 2ª fila, la 3ª se obtiene*

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5\\ 3 & -4 & 2 & 1 & 12 & 4\\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9\\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) (0,4 puntos) Rango A (dimensión del espacio generado por las columnas de A).

Respuesta: *Rango $A=3$ ya que A tiene tres posiciones pivote.*

c) (0,4 puntos) una base de $\operatorname{Col} A$ *(espacio generado por las columnas de A).*

***Respuesta**: Como las columnas pivote de A son la 1ª la 2ª y la 5ª, entonces las columnas 1ª,2ª y 5ª de A,*

$$\begin{bmatrix}0\\3\\3\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\\-7\\-9\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\12\\8\\6\end{bmatrix}$$

forman una base de $\operatorname{Col} A$.

d) (0,4 puntos) la dimensión de $\operatorname{Nul} A$ *(espacio núcleo o nulo de A)*

***Respuesta**: dim* $\operatorname{Nul} A = 3$ *ya que Rango* $A = 3$ *y dim* $\operatorname{Nul} A +$ *Rango* $A = 6$

e) (0,4 puntos) una base de $\operatorname{Fil} A$ *(espacio generado por las filas de A).*

***Respuesta**: Como el espacio generado por las filas de dos matrices equivalentes por filas es el mismo, las filas 1ª, 2ª y 3ª de la forma escalonada reducida de A,*

$$[1, 0, -2, 3, 0, -24], \quad [0, 1, -2, 2, 0, -7], \quad [0, 0, 0, 0, 1, 4]$$

son una base de $\operatorname{Fil} A$.

Ejercicio 3. *(2 puntos)*

a) (1 punto) Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ *una transformación de las matrices cuadradas* 2×2 *en* $\mathbf{R}^4$*, definida como:*

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \\ c+d \\ d+a \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ *está formada por:*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(utilizando la base en este orden), determina la matriz de la transformación T respecto de la base $\mathcal{B}$ *y la base canónica de* $\mathbf{R}^4$.

Respuesta:

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},$$

de donde se deduce que la matriz de la transformación T respecto de la base $\mathcal{B}$ y la base canónica de $\mathbf{R}^4$ es

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$$

b) *(1 punto) Sea $T:\mathbf{R}^2\longrightarrow\mathbf{R}^3$ una transformación lineal definida como:*

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\x-y\\x\end{pmatrix}.$$

- *Calcula la matriz canónica de T.*
- *¿Es T inyectiva? Justifica la respuesta. ¿Es T suprayectiva? Justifica la respuesta.*

Respuesta:

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ T\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

de donde se deduce que la matriz canónica de T es

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

*La transformación T **es inyectiva** pues las columnas de la matriz canónica son linealmente independientes, y **no es supreyectiva** pues las columnas de la matriz no generan todo $\mathbf{R}^3$.*

Ejercicio 4. *(2 puntos)*

a) (1,5 puntos) Diagonaliza la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

***Respuesta**: El polinomio característico es :* $(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-1)$ *de donde se dedude que los autovalores de la matriz son:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1-\sqrt{2}$. *Por tanto, como son distintos se tiene que la matriz es diagonalizable. Calculamos los autovectores asociados* v_1, v_2, v_3 *a* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, *respectivamente:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, se tiene que la matriz es diagonalizable con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (0,25 puntos) Determina la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = -5x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) + z(t) \end{cases}$$

***Respuesta**:*

La soluciòn general viene dada por la combinaciòn lineal:

$$C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2})t} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{2})t}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x(t) = 2C_1 e^t \\ y(t) = e^t(4C_1 + \sqrt{2}C_2 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}C_3 e^{-\sqrt{2}t}) \\ z(t) = e^t(5C_1 + C_2 e^{\sqrt{2}t} + C_3 e^{-\sqrt{2}}t) \end{pmatrix}.$$

c) *(0,25 puntos) Determina la solución del sistema del apartado b) con valor inicial* $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - \frac{5}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$.

***Respuesta**:*

Evaluando en la solución general en $t = 0$ y despejando las constantes se obtiene $C_1 = 1/2,\ C_2 = -15/4,\ C_3 = 5/4$, de donde se concluye que la solución es

$$\begin{pmatrix} x(t) = e^t \\ y(t) = 2e^t + \sqrt{2}(-\frac{15}{4})e^{(1+\sqrt{2})t} - \sqrt{2}(\frac{5}{4})e^{(1-\sqrt{2})t} \\ z(t) = \frac{5}{2}e^t + (-\frac{15}{4})e^{(1+\sqrt{2})t} - (\frac{5}{4})e^{(1-\sqrt{2})t}. \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. *(2 puntos) Sea V el subespacio de $\mathbf{R}^4$ generado por $v_1 = (1,1,1,1)$ y $v_2 = (1,-1,1,-1)$.*

a) *(0,5 puntos) Calcula el vector de V más cercano a $(2,1,1,0)$ (es decir $\mathrm{proy}_V(2,1,1,0)$).*

***Respuesta**: Como los vectores v_1 y v_2 son ortogonales se tiene*

$$\begin{aligned} \mathrm{proy}_V(2,1,1,0) &= \frac{(1,1,1,1)\cdot(2,1,1,0)}{4}(1,1,1,1) + \frac{(1,-1,1,-1)\cdot(2,1,1,0)}{4}(1,-1,1,-1) \\ &= (1,1,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

b) *(0,5 puntos) Encuentra $\widehat{v} \in V$ y $w \in V^{\perp}$ tales que se verifique $(2,1,1,0) = \widehat{v} + w$ (es decir, la descomposición ortogonal de $(2,1,1,0)$).*

***Respuesta**: Se tiene $\widehat{v} = \mathrm{proy}_V(2,1,1,0) = \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y*

$$w = (2,1,1,0) - \mathrm{proy}_V(2,1,1,0) = (2,1,1,0) - \left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

c) *(1 punto) Sea U el espacio generado por v_1, v_2 y $v_3 = (1,0,0,0)$. Calcula el vector de U más cercano a $(2,1,1,0)$.*

Respuesta: *Una base ortogonal de U, está formada por v_1, v_2 y*

$$v_3 - \operatorname{proy}_V v_3 = v_3 - \Big[\frac{(1,1,1,1)\cdot(1,0,0,0)}{4}(1,1,1,1) + \frac{(1,-1,1,-1)\cdot(1,0,0,0)}{4}(1,-1,1,-1)\Big]$$
$$= v_3 - \Big[\frac{1}{4}(1,1,1,1) + \frac{1}{4}(1,-1,1,-1)\Big] = v_3 - \Big(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\Big) = \Big(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\Big),$$

o también por v_1, v_2 y $(1,0,-1,0)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\operatorname{proy}_W(2,1,1,0) = \\
&= \frac{(1,1,1,1)\cdot(2,1,1,0)}{4}(1,1,1,1) + \frac{(1,-1,1,-1)\cdot(2,1,1,0)}{4}(1,-1,1,-1) \\
&+ \frac{(1,0,-1,0)\cdot(2,1,1,0)}{2}(1,0,-1,0) = \Big(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}(1,0,-1,0) = \\
&= \Big(2,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\Big).
\end{aligned}$$