Apellidos, Nombre

Departamento de Matemática Aplicada a la I.T. de Telecomunicación

ASIGNATURA: ÁLGEBRA LINEAL

Problema 1 (2 puntos)

Sea A una matriz 3×5 cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y sea $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^3$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$

a) (*0,2 puntos*) Calcula el rango de A y la dimensión del espacio nulo de A

Solución: Rango A = nº de posiciones pivotes = 3 y

$$\text{Dim}\,(\text{Nul}\,A) = 5 - \text{Rango}\,A = 2$$

b) (*0,2 puntos*) Calcula la dimensión del espacio fila de A

Solución: Es igual al rango, es decir 3

c) (*0,2 puntos*) Calcula las dimensiones del espacio imagen y del espacio nulo de T

Solución: La dimensiones del espacio imagen es igual al rango de A, es decir 3, y la del espacio nulo de T es igual a la del espacio nulo de A, es decir 2.

d) (*0,2 puntos*) ¿Es T inyectiva? ¿y suprayectiva?

Solución: Es suprayectiva pero no inyectiva

e) (*0,2 puntos*) Estudia si el sistema $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tiene una, ninguna o infinitas soluciones.

Solución: Tiene infinitas soluciones

f) (*0,2 puntos*) Estudia si $(0, 0, 1, 1, 2)$ pertenece al espacio fila de A

Solución: Sí pertenece, ya que las filas de la forma escalonada de A forman una base de Fil A y $(0, 0, 1, 1, 2)$ es una combinación lineal de estas filas (es la suma de la segunda con la tercera)

g) (*0,8 puntos*) Calcula una base del espacio nulo de A.

Solución: El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es equivalente a un sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto de soluciones de este sistema en forma paramétrica es (tomando las variables libres como parámetros)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego una base del núcleo de A es $\{(-2,1,0,0,0),(0,0,-1,-1,1)\}$.

Problema 2 (1 punto)

Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices 2×2 y $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ la aplicación lineal definida por $T(A) = A + A^t \quad$ (A^t denota la matriz transpuesta de A). Calcula el espacio Nulo o Núcleo, de T.

Solución: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces A pertenece al espacio nulo de T si:

$$\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 0, & b = -c \\ c = -d, & d = 0 \end{cases}$$

Por tanto, $Nul(T) = Gen\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\}$

Problema 3 (2 puntos)

Sea $T: R^3 \to R^2$ la aplicación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (x+y,z).$$

1) (0.3 puntos) Calcula la matriz canónica de T.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) (1 punto) Calcula la matriz de T referida a las bases $B = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$ de R^3 y $C = \{(1,1),(0,1)\}$ de R^2.

Solución: Como

$$\begin{array}{lll} T(1,1,0) = (2,0) & \text{y} & [(2,0)]_C = (2,-2) \\ T(0,1,1) = (1,1) & & \\ T(1,0,1) = (1,1) & \text{y} & [(1,1)]_C = (1,0) \end{array}$$

la matriz es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3) (0.7 puntos) Sea S la aplicación lineal $S : R^2 \to R^3$ definida por $S(x,y) = (y,x,0)$. Calcula la matriz de la transformación $T \circ S(x) = T(S(x,y))$ respecto de la base canónica de R^2.

Solución: La matriz canónica de S es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz de la transformación $T \circ S(x) = T(S(x,y))$ respecto de la base canónica de R^2 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4 (1 punto)

Sea T la aplicación lineal $T : R^2 \to R^2$ definida por

$$T(x,y) = (x+2y, -x+4y).$$

Determina una base respecto de la cual la matriz asociada a T sea diagonal.

Solución: La matriz canónica de la transformación es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ cuyos autovalores son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Por tanto la matriz A es diagonalizable. Los autoespacios asociados a los autovalores son:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \Rightarrow \quad Gen\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\} \\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \quad Gen\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \end{array}.$$

Por tanto, la base respecto de la cual la matriz asociada a T es l la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es:

$$\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

.

Problema 5 (1 punto) Resuelve la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 0$ verificando las condiciones iniciales $y(0) = 2, y'(0) = 3$.

Solución: Las soluciones de la ecuación caracteristica, $t^2-5t+6=0$, asociada a la ecuación diferencial homogénea $y'' - 5y' + 6y = 0$, son $t_1 = 2, t_2 = 3$. Por tanto la solución general de la ecuación viene expresada por:

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Y la solución particular de la ecuación diferencial que verifica las condiciones iniciales es tomando $c_1 = 3, c_2 = -1$. Es decir,

$$y_p = 3e^{2x} - e^{3x}.$$

Problema 6 (1.5 puntos)

El espacio nulo de una matriz $A \in M_{3\times3}$ son los vectores propios (x, y, z) cumpliendo $z = x + y$. Además se sabe que $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1) (0.5 puntos) Calcula una base de vectores propios de A.

2) (0.5 puntos) Encuentra una matriz P invertible y otra diagonal D tal que $A = PDP^{-1}$.

3) (0.5 puntos) Calcula A.

Problema 7 (1,5 puntos) Sean

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) *(0,2 puntos)* Encuentra una matriz A tal que

$$\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w} = A \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) *(0,8 puntos)* Calcula, resolviendo un problema de mínimos cuadrados, los valores de λ y μ que hagan a la norma $\left\|\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w} - \mathbf{b}\right\|$ tan pequeña como sea posible.

c) *(0,5 puntos)* Calcula una base ortogonal del subespacio $V = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$.