ÁLGEBRA LINEAL

EXAMEN GLOBAL **9 de enero de 2012**

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

Grupo: ________ **Titulación:** ______________________

ESCRIBA EL APELLIDO Y EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.

Ejercicio 1. *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

a) *(1 punto) Determinar la ecuación que deben verificar a, b, c para que el sistema $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ sea consistente.*

Solución.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ -3 & 9 & -5 & b \\ 6 & -3 & 4 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 0 & 10 & -4 & a+b \\ 0 & -5 & 2 & c-2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & a \\ 0 & -5 & 2 & c-2a \\ 0 & 0 & 0 & -3a+b+2c \end{bmatrix} \Rightarrow -3a+b+2c = 0.$$

b) *(0,5 puntos) Calcula una factorización LU de la matriz A.*

Solución.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & -5 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. *Sean* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -8 & -8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, *y* $\mathcal{E}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$.

a) *(1 punto) Calcula la matriz* $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ *de cambio de la base canónica* $\mathcal{E}$ *a la base* $\mathcal{B}$.

Solución. La matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ es la inversa de $P = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \left[\, \mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \,\right]$. Se tiene

$$\left[\, P \mid I \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\, I \mid P^{-1} \,\right]$$

Entonces

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *(1 punto) Calcula la* $\mathcal{B}$*-matriz de la aplicación lineal definida por* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *es decir la matriz de* T *con respecto a la base* $\mathcal{B}$ *tanto en el espacio final como en el inicial.*

Solución.

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[A]_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Otra forma de hacer el ejercicio es:

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, \quad T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad T(\mathbf{w}) = -8\mathbf{w} \quad \text{y entonces} \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ________________

Ejercicio 3. *(1,5 puntos) Sea A la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y sean $T_A : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$, $T_{A^\top} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $H : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ *y* $G : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *las aplicaciones definidas por*

$$T_A(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}, \quad T_{A^\top}(\mathbf{x}) = A^\top\mathbf{x}, \quad H(\mathbf{x}) = T_A\Big(T_{A^\top}(\mathbf{x})\Big), \quad G(\mathbf{x}) = T_{A^\top}\Big(T_A(\mathbf{x})\Big)$$

Rellena los recuadros de las siguientes tablas con Sí o No.

	T_A	$T_{A^\top}$	H	G
Inyectiva	No	Sí	Sí	No
Suprayectiva	Sí	No	Sí	No

	$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$A^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$AA^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$A^\top A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
Tiene solución única para todo $\mathbf{b}$	No	No	Sí	No
Tiene solución para todo $\mathbf{b}$	Sí	No	Sí	No

Utilizando que $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango} A^\top = 2$ y aplicando el Teorema del Rango se obtiene que $\dim \operatorname{Nul} A = 1$, $\dim \operatorname{Nul} A^\top = 0$. Por tanto, T_A es suprayectiva y no es inyectiva, y $T_{A^\top}$ es inyectiva y no suprayectiva. Se tiene que

$$AA^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\operatorname{rango} AA^\top = \operatorname{rango} A^\top A = 2$. Por tanto H, cuya matriz es $AA^\top$, es invertible y G, cuya matriz es $A^\top A$ no es ni inyectiva ni suprayectiva. De todo ello se deducen fácilmente las respuestas dadas en la tabla.

Ejercicio 4. *(1 punto) Sean*

$$\mathbf{v} = (-1, 2, -1), \quad \mathbf{w} = (2, -3, 3), \quad \mathbf{u} = (4, 1, 2)$$

Utilizando el método de mínimos cuadrados, calcula dos números x e y tales que la distancia entre el vector $x\mathbf{v} + y\mathbf{w}$ y el vector $\mathbf{u}$ sea la menor posible.

Solución. Los números x e y pedidos son la solución mínimos cuadrados del sistema inconsistente

$$x\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\-3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -3\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\2 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -3\\-1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -11\\-11 & 22\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\2 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\11\end{bmatrix}$$

las ecuaciones normales de este problema son

$$\begin{bmatrix}6 & -11\\-11 & 22\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\11\end{bmatrix}$$

cuya única solución es $x = 3$, $y = 2$

Ejercicio 5. *(1 punto) Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 y sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal que transforma a un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2$ en $p(x-1)$ (Por ejemplo T transforma $x^2 + 3$ en $(x-1)^2 + 3$). Encuentra la matriz de T respecto a la base $\{1, x, x^2\}$.*

Solución. *Si $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la matriz de T es*

$$A = \Big[\, [T(1)]_{\mathcal{B}} \;\Big|\; [T(x)]_{\mathcal{B}} \;\Big|\; [T(x^2)]_{\mathcal{B}} \,\Big] = \Big[\, [1]_{\mathcal{B}} \;\Big|\; [x-1]_{\mathcal{B}} \;\Big|\; [(x-1)^2]_{\mathcal{B}} \,\Big]$$

$$= \left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \;\middle|\; [x^2 - 2x + 1]_{\mathcal{B}}\right] = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

Ejercicio 6. *(1,5 puntos) Diagonaliza ortogonalmente la matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

El polinomio característico de la matriz A es $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-5)$

Un vector propio correspondiente a $\lambda = 0$ se puede calcular resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una solución de norma 1 de este sistema es $(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. Un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$ se puede calcular resolviendo el sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una solución de norma 1 de este sistema es $(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.

Nótese que los vectores propios obtenidos, $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ y $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, son ortogonales ya que corresponden a valores propios distintos, y forman por tanto una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$. Así, la matriz cuyas columnas son estos vectores propios, $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ es ortogonal.

Entonces

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

es una diagonalización ortogonal de A.

Ejercicio 7. *(1,5 puntos) Sea V el espacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, -1)$ *y* $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 1, 0)$ *. Calcula una matriz B tal que*

$$\operatorname{Proy}_V \mathbf{x} = B\,\mathbf{x}, \qquad \textit{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$$

donde $\operatorname{Proy}_V \mathbf{x}$ *es la proyección ortogonal de* $\mathbf{x}$ *sobre V.*

Solución. Una base ortogonal de V, $\{\widetilde{\mathbf{u}}_1, \widetilde{\mathbf{u}}_2\}$, se calcula mediante el proceso de Gram-Schmidt:

$$\widetilde{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \widetilde{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_2 - \operatorname{Proy}_{\operatorname{Gen}\mathbf{v}_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normalizando la base formada por $\widetilde{\mathbf{u}}_1$ y por $\widetilde{\mathbf{u}}_2$ se obtiene una base ortonormal de V formada por

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A partir de esta base ortonormal de V podemos calcular la matriz del proyector ortogonal sobre V:

$$B = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$