Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha:** 18 de Enero de 2013

Fecha publicación notas: 24 de Enero de 2013 **Fecha revisión examen:** 29 de Enero de 2013

Duración del examen: 2 horas y media

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

---

1. Sea V el espacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) que verifican

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad y \qquad x_1 - x_4 = 0$$

a) *(0,3 puntos)* Encuentra una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 4}$ cuyo espacio nulo sea V

Solución: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) *(0,2 puntos)* Calcula la dimensión de V

Solución: Como $\dim(\mathrm{Nul}\, A) + \mathrm{Rango}(A) = 4$ y $\mathrm{Rango}(A) = 2$, se tiene que $\dim V = \dim \mathrm{Nul}\, A = 2$.

c) *(0,5 puntos)* Encuentra una base de V

Solución: Como $\dim(V) = 2$, basta encontrar 2 vectores linealmente independientes cumpliendo las ecuaciones de V $(x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_4 = 0)$. Por ejemplo: $\{(1, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 1)\}$ es una base de V.

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x + 4y)$ y sea $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ un giro de 180º con centro en el (0,0) (o equivalentemente una simetría con respecto a $(0, 0)$).

a) *(0.5 puntos)* ¿Es T invertible? en caso de serlo calcula $T^{-1}(x, y)$

Solución: La matriz estándar de T es $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Como $\det A = 2 \neq 0$, A es no singular, y por tanto T es invertible. La matriz de T^{-1} es $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Por tanto

$$T^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4x - y \\ -2x + y \end{bmatrix}$$

b) *(0.5 puntos)* Calcula la matriz de la transformación $H(x, y) = G\big(T(x, y)\big)$

Solución: Como $G(1, 0) = (-1, 0)$ y $G(0, 1) = (0, -1)$, la matriz estándar de G es $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces la matriz de $H(x, y) = G\big(T(x, y)\big)$ es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

3. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2 y sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal que transforma un polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_2$ en el polinomio $xp'(x)$. Por ejemplo $T(3x^2+x) = x(6x+1)$.

   a) *(0,2 puntos)* ¿Pertenece el polinomio $p(x) = 5$ al núcleo (o espacio nulo) de T? (justifica la respuesta)

      Solución: Sí pertenece ya que $T(5) = 0$.

   b) *(0,2 puntos)* Describe el núcleo de T

      Solución: El núcleo de T es el conjunto de los polinomios de grado 0 (es decir de constantes, $\mathrm{Nul}(T) = \{k : k \in \mathbb{R}\}$).

   c) *(0,2 puntos)* ¿Pertenece el polinomio $p(x) = 5$ a la imagen (o rango) de T? (justifica la respuesta)

      Solución: No pertenece ya que para cualquier polinomio $p(x)$, $T\big(p(x)\big) = xp'(x) \neq 5$.

   d) *(0,2 puntos)* ¿es T suprayectiva? ¿es T inyectiva?

      Solución: No es suprayectiva ya que $5 \notin$ Imagen T. No es inyectiva ya que $T(5) = 0$.

   e) *(0,2 puntos)* Encuentra una base del espacio imagen de T

      Solución: Como $T(a+bx+cx^2) = x(b+2cx) = bx+2cx^2$, una base de la imagen de T es $\{x, x^2\}$.

   f) *(0,5 puntos)* Encuentra la matriz de T respecto de la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$.

      Solución: Los transformados de los elementos de la base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ son $T(1) = 0, T(x) = x$ y $T(x^2) = 2x^2$ cuyas coordenadas en la base $\mathcal{E}$ son respectivamente $(0,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,2)$. Por tanto, la matriz de T respecto de la base $\mathcal{E}$ es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

4. *(1,5 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}05$ por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz 100×55 de rango 55, $\mathbf{b}$ un vector de $\mathbb{R}^{100}$ y $\mathbf{c}$ un vector de $\operatorname{Col} A$. Sean $T : \mathbb{R}^{55} \mapsto \mathbb{R}^{100}$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, , y $[A\ \ \mathbf{b}]$ y $[A\ \ \mathbf{c}]$ las matrices ampliadas de los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$). Por ejemplo, en la afirmación: "A tiene 55 columnas" se pondría S, en la afirmación: "A es una matriz cuadrada" se pondría N, y en la afirmación: "$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene alguna solución", se pondría X ya que no siempre ocurre (pero podría ocurrir).

A tiene 55 columnas independientes	S
La aplicación T es inyectiva	S
La aplicación T es suprayectiva	N
La matriz $[A\ \ \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en la última columna	X
$\mathrm{Dim}(\mathrm{Nul}\ (A)) = 45$	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene alguna solución (es compatible)	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene una única solución	S
$\mathrm{Dim}(\mathrm{Col}(A)) = 55$	S
El rango de $[A\ \ \mathbf{b}]$ es 55	X
El rango de $[A\ \ \mathbf{c}]$ es 56	N
$\mathrm{Nul}\ A = \{0\}$	S
La dimensión de la imagen de T es 45	N
A tiene 55 posiciones pivote	S
El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	N

5. *(1 punto)* Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Encuentra una base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $A = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$, es decir tal que A sea la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$.

Solución: Denotamos $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$. La primera columna de $A = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ proporciona las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ del primer elemento de la base $\mathcal{C}$, $[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Entonces $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$. De la misma forma

$$\mathbf{c}_2 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

6. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *(0.3 puntos)* Calcula los valores propios de A

Solución: El polinomio característico de A es

$$\det A - \lambda I = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

y por tanto sus valores propios son 0 (simple) y 1 (doble).

b) *(0.5 puntos)* Calcula dos, o si es posible tres, vectores propios de A linealmente independientes

Solución: El espacio propio correspondiente al valor propio 1 esta formado por las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente por las soluciones de $y - z = 0$. Este espacio tiene dimensión 2, y en consecuencia existen 2 vectores propios independientes correspondientes al valor propio 1, por ejemplo $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 0)$. El espacio propio correspondiente al valor propio 0 esta formado por las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente por las soluciones de $x = 0, y = 0$. Entonces un vector propio correspondiente al valor propio 0 es $(0, 0, 1)$. Por tanto $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son tres vectores propios de A linealmente independientes.

c) *(0.5 puntos)* ¿Es A diagonalizable? en caso de serlo, encuentra una matriz P invertible y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$.

Solución: Sí es diagonalizable, de hecho, según lo obtenido en el apartado anterior $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) *(0.2 puntos)* Calcula A^{17}

Solución:

$$A^{17} = PD^{17}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^{17} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

7. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,2,3)$ y $(0,3,5)$, y sea $\mathbf{b} = (2,-1,0)$.

   a) *(1 punto)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre V

   Solución: Para encontrar una base de V utilizamos el proceso de Gram-Schmidt: hacemos $\mathbf{u}_1 = (1,2,3)$ y como

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{(0,3,5)\cdot(1,2,3)}{\|(1,2,3)\|^2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

   tomamos $\mathbf{u}_2 = (-3,0,1)$. Los vectores calculados $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman una base ortogonal de V. Entonces

$$\mathrm{Proy}_V\, \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_2 = (9/5, 0, -3/5)$$

   b) *(0.3 puntos)* Calcula la distancia de $\mathbf{b}$ al subespacio V.

   Solución:

$$\mathrm{dist}(\mathbf{b}, V) = \left\|\mathbf{b} - \mathrm{Proy}_V\, \mathbf{b}\right\| = \left\|(1/5, -1, 3/5)\right\| = \sqrt{\frac{7}{5}}$$

   c) *(0.2 puntos)* Calcula un vector ortogonal a V.

   Solución: Un vector ortogonal a V es

$$\mathbf{b} - \mathrm{Proy}_V\, \mathbf{b} = (1/5, -1, 3/5)$$

8. *(1 punto)* Resuelve la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$y'' - y = -x, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = 0$$

Solución: El sistema homogéneo asociado $y'' - y = 0$ tiene ecuación característica $k^2 - 1$ con raíces $k = 1$ y $k = -1$. Como 0 no es raíz del polinomio característico existe una solución de $y'' - y = -x$ del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene

$$y'' - y = 2a - ax^2 - bx - c = -x$$

Tomando $a = c = 0$ y $b = 1$ se obtiene la solución particular $y = x$. La solución general de $y'' - y = -x$ es

$$y = x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) &= 1 + C_1 - C_2 = 0 \end{aligned}$$

encontramos los valores de las constantes para que se verifiquen las condiciones iniciales $y(0) = 3, y'(0) = 1$. La solución de este sistema es $C_1 = 1, C_2 = 2$. Por tanto, la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales es

$$y = x + e^x + 2e^{-x}$$