Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha del examen:** 16 de enero de 2015

Fecha publicación notas: 23 de enero de 2015 **Fecha revisión examen:** 26 de enero de 2015

Duración del examen: 2 horas y 30 minutos

APELLIDOS:

NOMBRE:

Titulación:

---

1. *(1,5 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y −0,1 por cada respuesta errónea)* Sea A una matriz cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_7$ las columnas de A, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^7$ (vectores columna) y $T : \mathbb{R}^7 \mapsto \mathbb{R}^5$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$.

Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$).

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	S
El espacio nulo de A tiene dimensión 2	S
Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^5$	N
El espacio columna de A es $\mathbb{R}^5$	S
T es suprayectiva	S
T es inyectiva	N
$\mathbf{w}$ pertenece al espacio nulo de A	N
$\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 + 4\mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$	N
$\mathbf{v}$ pertenece al espacio nulo de A	S
$2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$	S
El rango de $A^\top$ es 5	S
El sistema $A^\top\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene una única solución	X
El espacio nulo de $A^\top$ tiene dimensión 2	N

2. Sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(x, y) = (2x - y, -x + 2y)$, $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ y $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

   a) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la composición $(T^{-1} \circ T^{-1})(\mathbf{x}) = T^{-1}\big[T^{-1}(\mathbf{x})\big]$

   Solución: La matriz (estándar o canónica) de T es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Entonces la matriz de T^{-1} es

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   La matriz de la composición $(T^{-1} \circ T^{-1})(\mathbf{x}) = T^{-1}\big[T^{-1}(\mathbf{x})\big]$ es

$$A^{-1}A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   b) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$, es decir la que verifica $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, donde $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base $\mathcal{B}$ y $[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{x}$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base estandar $\mathcal{E}$.

   Solución: La matriz de cambio de base $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ es

$$P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Entonces

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   c) *(1 punto)* Encuentra la matriz respecto a la base $\mathcal{B}$ (la $\mathcal{B}$-matriz) de la transformación lineal T

   Solución: Los transformados de la base $\mathcal{B}$ son

$$T(1, 1) = (1, 1), \quad T(1, 0) = (2, -1)$$

   Las coordenadas de $T(1, 1) = (1, 1)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(1, 0)$ y las coordenadas de $T(1, 0) = (2, -1)$ en la base $\mathcal{B}$ son $(-1, 3)$ ya que $(2, -1) = -(1, 1) + 3(1, 0)$ o bien porque

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   Por tanto la matriz respecto a la base $\mathcal{B}$ de T es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \Big[[T(1, 1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(1, 0)]_{\mathcal{B}}\Big] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   También se puede calcular la $\mathcal{B}$-matriz de T, a partir de la matriz estándar de T, A, utilizando la relación

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} A P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

3. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(1,1,1)$ y $(-1,0,1)$ y sea $\mathbf{b} = (1,0,0)$

   a) *(1 punto)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el subespacio V, $\mathrm{Proy}_V \mathbf{b}$, y la distancia de $\mathbf{b}$ al subespacio V

   Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre V es

$$\begin{aligned}\mathrm{Proy}_V \mathbf{b} &= \frac{(1,1,1)\cdot(1,0,0)}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) + \frac{(-1,0,1)\cdot(1,0,0)}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) = \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1)\\ &= \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

   Entonces la distancia de $\mathbf{b}$ al subespacio V es

$$\mathrm{dist}(\mathbf{b}, V) = \mathrm{dist}(\mathbf{b}, \mathrm{Proy}_V \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{b}\| = \left\|\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

   b) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio V, es decir una matriz P tal que se verifique $\mathrm{Proy}_V\, \mathbf{x} = P\,\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Comprueba que se se verifica $\mathrm{Proy}_V\, \mathbf{b} = P\,\mathbf{b}$.

   Solución: Una base ortonormal de V esta formada por las columnas de la matriz

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

   Entonces la matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio V es

$$P = U\,U^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

   En efecto

$$\mathrm{Proy}_V \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = P\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* Sabiendo que $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son vectores propios de la matriz A y también de la matriz B calcula los valores propios de la matriz A y de la matriz B sin calcular previamente los polinomios característicos

Solución: Se tiene

$$A\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1, \quad A\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = 4\mathbf{p}_2$$

$$A\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = 4\mathbf{p}_3, \quad B\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{bmatrix} = -8\mathbf{p}_1$$

$$B\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = -5\mathbf{p}_2, \quad B\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -6 & -1 & -1 \\ -1 & -6 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = -5\mathbf{p}_3$$

Por tanto los valores propios de A son 1 y 4 (este último con multiplicidad 2) y los valores propios de B son -8 y -5 (este último con multiplicidad 2)

b) *(0,5 puntos)* Encuentra una matriz P no singular y otra D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$ (no es necesario calcular P^{-1})

Solución: Según lo calculado en el anterior apartado, se puede tomar

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) *(1 punto)* Calcula una matriz U ortogonal y otra D diagonal tales que $B = UDU^\top$

Solución: $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ es una base del espacio propio asociado a -5. Una base ortogonal esta formada por $\mathbf{p}_2$ y (proceso de Gram-Schmidt)

$$\mathbf{p}_3 - \frac{\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{p}_2}{\|\mathbf{p}_2\|^2}\mathbf{p}_2 = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \big(1/2, 1/2, -1\big)$$

Una base ortogonal de vectores propios es pues $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$ y $(1, 1, -2)$. Una matriz U ortogonal y D diagonal verificando $A = UDU^\top$ son pues

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

5. *(1 punto)* Utilizando valores y vectores propios complejos, diagonaliza la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

y entonces los valores propios son j y su conjugado $-j$. El espacio propio asociado a $\lambda = j$ esta formado por los vectores que satisfacen

$$\begin{bmatrix} 1-j & -2 \\ 1 & -1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La segunda fila es combinación lineal de la primera y entonces la ecuación del subespacio es

$$(1-j)x - 2y = 0$$

Una solución no nula, es $x = 2$, $y = 1 - j$. Por tanto $(2, 1-j)$ es un vector propio asociado a $\lambda = j$ y su conjugado $(2, 1+j)$ es un vector propio asociado a $\lambda = -j$. Por tanto

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1-j & 1+j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix} \frac{1}{4j} \begin{bmatrix} 1+j & -2 \\ -1+j & 2 \end{bmatrix}$$

6. *(1 punto)* Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = e^x$

Solución: La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = 0$$

Nótese que tiene la raíz doble $k = -1$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' + 2y' + y = 0$ es

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Como 1 no es raíz del polinomio característico podemos asegurar que existe una solución particular del tipo $y_p = A\, e^x$. Sustituyendo

$$y_p'' + 2y_p' + y_p = Ae^x + 2Ae^x + Ae^x = 4Ae^x$$

Haciendo $A = 1/4$ se satisface la ecuación y así $y_p = (1/4)e^x$ es una solución particular de la ecuación.

La solución general de la ecuación es

$$y = (1/4)e^x + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

7. Sea T la transformación $T : \mathcal{M}_{2\times 3} \mapsto \mathcal{M}_{3\times 2}$ definida por $T(A) = A^\top$.

a) *(0,5 puntos)* Halla el núcleo (o espacio nulo) y el espacio Imagen (o Rango) de T

Solución: Denotemos por $0_{m\times n}$ la matriz nula (con todas las entradas nulas) $m \times n$. El núcleo de T son las matrices que verifican $T(A) = A^\top = 0_{3\times 2}$. Evidentemente $A^\top = 0_{3\times 2}$ si y sólo si $A = 0_{2\times 3}$. Por tanto el núcleo de T es $\{0_{2\times 3}\}$. El espacio imagen de T es $\mathcal{M}_{3\times 2}$. En efecto, para cualquier matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}$ se tiene que $T(B^\top) = B$ y por tanto B está en la imagen de T.

b) *(0,5 puntos)* ¿Es T inyectiva? ¿Es suprayectiva? Justifica la respuesta

Solución: Es inyectiva ya que $T(A) = A^\top = T(B) = B^\top$ si y sólo si $A = B$. Es suprayectiva ya que el espacio imagen de T es $\mathcal{M}_{3\times 2}$.