EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL

Fecha del examen: 13 de enero de 2017 | Duración del examen: 2 horas y 50 minutos

Publicación de notas: 23 de enero de 2017 | Revisión del examen: 26 de enero de 2017

APELLIDOS:

NOMBRE: **DNI:**

---

1. Sean

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

a) *(0,3 puntos)* Resuelve la ecuación vectorial $\mathbf{v}_1 = x\,\mathbf{b}_1 + y\,\mathbf{b}_2$.

Solución: Las equivalencias por filas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mid & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mid & 3 \\ 1 & 2 & \mid & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 1 \\ 2 & 1 & \mid & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & -3 & \mid & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 1 \\ 0 & 1 & \mid & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & 5/3 \\ 0 & 1 & \mid & -1/3 \end{bmatrix}$$

muestran que la única solución es $x = 5/3$ e $y = -1/3$.

b) *(0,7 puntos)* Consideramos las bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Obtener la matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{V}}$ (la matriz que satisface $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{V}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{V}}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$).

Solución: Como en el apartado anterior resolvemos la ecuación vectorial $\mathbf{v}_2 = x\,\mathbf{b}_1 + y\,\mathbf{b}_2$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mid & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mid & 1 \\ 1 & 2 & \mid & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 3 \\ 2 & 1 & \mid & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 3 \\ 0 & -3 & \mid & -5 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & \mid & 3 \\ 0 & 1 & \mid & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & -1/3 \\ 0 & 1 & \mid & 5/3 \end{bmatrix}$$

obteniendo $x = -1/3$ e $y = 5/3$. Entonces $[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ y $[\mathbf{v}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$ y por tanto

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{V}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

2. *(0,6 puntos)* Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x - y, 2x - 3y)$. ¿Es T una transformación invertible? En caso de serlo, calcula su transformación inversa $T^{-1}(x, y)$.

Solución: La matriz estándar de T, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ es invertible pues $\det A = -1 \neq 0$. Por tanto, la transformación T es invertible. La matriz de T^{-1} es A^{-1}. Entonces

$$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - y \\ 2x - y \end{pmatrix}$$

o, en otra notación, $T^{-1}(x, y) = (3x - y, 2x - y)$.

3. Consideramos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) *(0,6 puntos)* Determinar para qué valor o valores del parámetro a la matriz A no es invertible.

Solución: Las equivalencias por fila

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & -1+a & a-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-3 \end{bmatrix}$$

muestran que la matriz es no invertible cuando $a = 1$ o $a = 3$.

b) *(0,3 puntos)* Cuando $a = 3$, ¿pertenece el vector $\mathbf{v} = (-5, 3, -1, 2)$ al espacio nulo de A? ¿cuál es la dimensión del espacio nulo de A? Justifica las respuestas.

Solución: Cuando $a = 3$,

$$A\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y entonces $\mathbf{v}$ pertenece al espacio nulo de A. Cuando $a = 3$ el rango de A es 3. Según el teorema del rango Rango $A+$ Dim Nul $A = 4$. Por tanto, Dim Nul $A = 1$.

b) *(0,7 puntos)* Cuando $a = 3$ una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{p} = (3, 0, -1, -2)$. Utilizando esta solución particular y lo obtenido en el apartado anterior, calcula la solución general del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuando $a = 3$.

Solución: Cuando $a = 3$, según el apartado anterior, Dim Nul $A = 1$ y el vector $\mathbf{v}$ pertenece a Nul A. En consecuencia, una base de Nul A es $\{\mathbf{v}\}$. Entonces las soluciones del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vienen dadas por $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{v}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vienen dadas por

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

4. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y V el subespacio generado por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

a) *(0,7 puntos)* Calcula la distancia del subespacio V al vector $\mathbf{x}$.

Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre V es

$$\mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La distancia de V a $\mathbf{x}$ es $\|\mathbf{x} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$.

b) *(0,3 puntos)* Calcula un vector $\mathbf{v}_3$ tal que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sea base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Basta calcular un vector ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, por ejemplo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{x} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Sean $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal cuya matriz respecto a la base estándar $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y a la base $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) *(0,3 puntos)* Calcula el polinomio $T(1,2)$.

Solución: $[T(1,2)]_{\mathcal{B}} = A[(1,2)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y entonces $T(1,2) = 3 - x + x^2$.

b) *(0,7 puntos)* Calcula la matriz de la transformación T respecto a las base $\mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y a la base $\mathcal{D} = \{1+x, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$.

Solución: Como

$$[T(1,1)]_{\mathcal{B}} = A[(1,1)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $T(1,1) = 2 = 2(1+x) - 2x$ y así $[T(1,1)]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Como

$$[T(1,-1)]_{\mathcal{B}} = A[(1,-1)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que $T(1,-1) = 2x - 2x^2$ y por tanto $[T(1,-1)]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz de T respecto a $\mathcal{C}$ y a $\mathcal{D}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Se podría también obtener esta matriz mediante el cálculo

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} A P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. *(1,5 puntos)* Estudia para qué valores del parámetro α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. Para el valor, o los valores de α tales que A sea diagonalizable, calcula una matriz D diagonal y una matriz P no singular tales que $A = PDP^{-1}$.

Solución: El polinomio característico de A es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

En consecuencia, la matriz A es diagonalizable si el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ tiene dimensión 2. Este espacio propio es el espacio nulo de la matriz

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha \neq 0$, el rango de $A - I$ es 2 y entonces el espacio nulo de $A - I$ tiene, según el teorema del rango, dimensión 1, y por tanto la matriz A no es diagonalizable.

Si $\alpha = 0$, el rango de $A - I$ es 1 y entonces el espacio nulo de $A - I$ tiene, según el teorema del rango, dimensión 2, y por tanto la matriz A es diagonalizable. En este caso, el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ es el espacio nulo de

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que esta formado por los vectores (x, y, z) que verifican $z = 0$. Una base de este espacio es $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$. El espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es el espacio nulo de

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que esta formado por los vectores (x, y, z) que verifican $x = z, y = z$. Una base de este espacio es $\{(1,1,1)\}$. Entonces, las matrices pedidas son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Sea A una matriz simétrica que verifica $A\mathbf{v}_1 = 5\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$, donde $\mathbf{v}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (1,-1,0)$ y $\mathbf{v}_3 = (1,0,-1)$.

a) *(0.7 puntos)* Diagonaliza ortogonalmente A y calcula A.

Solución: Para calcular una base ortogonal del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$, aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a la base formada por $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ obteniendo

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 = (1,-1,0), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3 - \mathrm{Proy}_{\mathrm{Gen}\{\mathbf{u}_1\}}\mathbf{v}_3 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \frac{1}{2}(1,1,-2)$$

Entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) *(0,4 puntos)* Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, $V = \mathrm{Gen}\,(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre V.

Solución: La matriz $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ tiene por columnas una base ortonormal de V. Entonces la matriz de la proyección ortogonal sobre V es

$$UU^\top = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/6 & -2/6 & -2/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ -2/6 & -2/6 & 4/6 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) *(0,4 puntos)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{x} = (3,2,1)$ sobre V.

Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{x} = (3,2,1)$ sobre V es

$$\mathrm{Proy}_V\,\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

8. Sea $\mathbb{P}_4$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor que 4 y sea

$$H = \left\{ a + b\,x^2 + c\,x^4 \;:\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

a) *(0,3 puntos)* Demuestra que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4$ y que $\mathcal{B} = \{1, x^2, x^4\}$ es base de H.

Solución: H es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4$ puesto que $H = \left\{ a + b\,x^2 + c\,x^4 \;:\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$ Gen $\{1, x^2, x^4\}$, es decir H es el subespacio vectorial generado por los polinomios de $\mathbb{P}_4$: 1, x^2 y x^4. El conjunto $\{1, x^2, x^4\}$ es según hemos observado un conjunto de generadores de H. Además $1, x^2, x^4$ son independientes ya que si $a + bx^2 + cx^4 = 0$ necesariamente $a = b = c = 0$. Por tanto $\mathcal{B} = \{1, x^2, x^4\}$ es una base de H.

b) *(0,3 puntos)* Sea $\mathcal{C} = \{2 + x^2, x^2, 3x^4 + 1\}$. Demuestra que $\mathcal{C}$ es base de H.

Solución: Utilizando el isomorfismo de coordenadas correspondiente a la base $\{1, x^2, x^4\}$ de H, se obtiene que $\mathcal{C}$ es base de H si y sólo si $\{(2, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 3)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, lo cual es cierto como muestra la siguiente equivalencia por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c) *(0,8 puntos)* Calcula la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.

Solución: Se tiene

$$P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}} = \Big[[2 + x^2]_{\mathcal{B}} \quad [x^2]_{\mathcal{B}} \quad [3x^4 + 1]_{\mathcal{B}} \Big] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

La inversa de $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}$ se puede calcular mediante las equivalencias por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \quad \text{y entonces} \quad P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{C}}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

d) *(0,4 puntos)* Calcula las coordenadas de $p(x) = 2 - x^2 + 5x^4$ en la base $\mathcal{C}$.

Solución:

$$[x]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [x]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 10 \end{bmatrix}$$