# ÁLGEBRA LINEAL

**EXAMEN EXTRAORDINARIO** **5 de Julio de 2010**

**Apellidos y Nombre:** ______________________________

**Ejercicio 1.** *Sea* $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ *una transformación lineal definida como:*

$$T(e_1) = e_1' - e_2' + 2e_3'$$
$$T(e_2) = e_1' + 2e_2' - 3e_3'$$

*donde* $\{e_1, e_2\}$ , $\{e_1', e_2', e_3'\}$ *son las bases canónicas de* $\mathbf{R}^2$ *y* $\mathbf{R}^3$*, respectivamente.*

*a) ( 0,4 puntos) Calcula la matriz canónica de* $T$*.*

$$[T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

*b) ( 0,4 puntos) ¿Es* $T$ *inyectiva? Justifica la respuesta. ¿Es* $T$ *suprayectiva? Justifica la respuesta.*

$$[T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Como las columnas de la matriz de la transformacion no generan* $\mathbf{R}^3$ *se deduce que la transformación no es suprayectiva. sin embargo, como las columas son linealmente independientes, se tiene que la transformación* $T$ *es inyectiva.*

*c) ( 0,4 puntos) Sea* $A$ *la matriz canónica de* $T$*, calculada en el apartado a). Calcula una base de* $\operatorname{Col} A$ *(espacio generado por las columnas de* $A$*) y una base del* $\operatorname{Fil} A$ *(espacio generado por las* *filas de A).*

$$Base_{\mathrm{Col}\,A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \quad Base_{\mathrm{Fil}\,A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

*d) ( 0,2 puntos) Calcula la dimensión de* $\mathrm{Nul}\,A$ *(espacio núcleo o nulo de A)*

$$n^o \; columnas = dim(\mathrm{Col}\,A) + dim(\mathrm{Nul}\,A)$$

*Por tanto,* $2 = 2 + dim(\mathrm{Nul}\,A)$ *de donde se deduce que* $dim(\mathrm{Nul}\,A) = 0$*. Tambien, se puede concluir del hecho de que* $\mathrm{Nul}\,A = \{\overline{0}\}$*.*

*e) ( 0,6 puntos) Estudia si el conjunto* $\mathbf{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathbf{R}^2$ *y en caso afirmativo calcula la matriz del cambio de base de* $\mathbf{B}$ *a la base canónica de* $\mathbf{R}^2$

*Considerando la matriz formada por los vectores de* $\mathbf{B}$*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*se tiene que las columas son linealmente independientes, por lo tanto se deduce que* $\mathbf{B}$ *es una base de* $\mathbf{R}^2$*.*

*La matriz del cambio de base de* $\mathbf{B}$ *a la base canónica* $\mathbf{C}$ *de* $\mathbf{R}^2$ *es*

$$P_{\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{B}} = [[b_1]_{\mathbf{C}} \; [b_2]_{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

*f) ( 0,5 puntos) Calcula la matriz de la transformación* $T$ *respecto de la base* $\mathbf{B}$ *(definida en el apartado anterior) y la base canónica de* $\mathbf{R}^3$*.*

$$M = [[T(b_1)]_{\mathbf{C}} \quad [T(b_2)]_{\mathbf{C}}] = \left[ [T(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix})]_{\mathbf{C}} \quad [T(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix})]_{\mathbf{C}} \right]$$

*siendo* $\mathbf{C}$ *la base canónica de* $\mathbf{R}^3$, *y como*

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

*De donde se concluye que*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 2.** *(0.75 puntos) Hallar los valores de* $n$ *para que la dimensión del espacio columna de la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2n \\ 3 & -1 & n & -1 \\ -3 & 5 & -2n & -4 \end{bmatrix}$$

*sea 3.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2n \\ 3 & -1 & n & -1 \\ -3 & 5 & -2n & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2n \\ 0 & -4 & n & -1+6n \\ 0 & 0 & 0 & -1+n \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que la dimensión del espacio columna es 3 si y sólo si $n \neq 1$.

**Ejercicio 3.** *(0.75 puntos) Sea la matriz* $A$ *de orden 3 dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{bmatrix}$$

*Calcula los valores de los parámetros* $a,\ b,\ c$ *para que* $\lambda = 1$ *sea un valor propio de* $A$ *que tiene como vector propio asociado al vector* $\overline{v} = (1,\ 1,\ 1)$.

*Si* $\overline{v}$ *es un vector propio de* $A$ *se verifica que* $A\overline{v} = \overline{v}$, *es decir,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

*Resolviendo el sisetma anterior se obtiene que* $a = -2,\ b = -2\ c = -3$.

**Ejercicio 4.** *Sea* $\mathbb{P}_2$ *el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2. Sea* $\mathcal{A}$ *el conjunto de los polinomios* $p(x)$ *de* $\mathbb{P}_2$ *que cumplen* $p(0) = 0$

a) *(0.5 puntos) ¿Es* $\mathcal{A}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbb{P}_2$*? En caso afirmativo encuentra una base de* $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \{a_1 t + a_2 t^2\ /\ a_1, a_2 \in \mathbf{R}\}$*. Por tanto,* $\mathcal{A} = Gen\{t, t^2\}$*, y por tanto es un subespacio vectorial de* $\mathbb{P}_2$*, siendo* $\{t, t^2\}$ *una base de dicho subespacio.*

b) *(0.5 puntos) Calcula las coordenadas de* $x^2 + x$ *en la base* $\mathcal{B} = \{1 + x,\ 1 - x,\ x^2\}$ *de* $\mathbb{P}_2$*.*

*Siguiendo el orden establecido en la base* $\mathcal{B}$*, podemos expresar*

$$x^2 + x = c_1(1 + x) + c_2(1 - x) + c_3(x^2)$$

*siendo* $c_1, c_2, c_3$ *las coordenadas de* $x^2 + x$ *en la base* $\mathcal{B}$*. De donde se deduce que*

$$[x + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *(1.5 puntos)* Encuentra una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = D$ siendo $D$ una matriz diagonal.

Solución: El polinomio característico de $A$ es

$$\text{Det}\,(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda+1)^2(\lambda - 2)$$

Entonces, los valores propios de $A$ son $\lambda = -1$ (doble, es decir con multiplicidad algebraica 2) y $\lambda = 2$ (simple).

El espacio propio asociado a $\lambda = -1$ es el formado por los vectores $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ cumpliendo

$$(A+I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente $x + y + z = 0$. Una base de este espacio (que tiene dimensión 2) es $\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$.

El espacio propio asociado a $\lambda = 2$ es el formado por los vectores $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ cumpliendo

$$(A-2I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente $x = y = z$. Una base de este espacio (que tiene dimensión 1) es $\{(1,1,1)\}$.

Por tanto, $A$ es diagonalizable, concretamente $P^{-1}AP = D$ (o equivalentemente $A = PDP^{-1}$) con

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) *(1 punto)* Halla la solución del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solución: Utilizando la diagonalización de $A$ obtenida en el apartado anterior se obtiene que la solución general del sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La solución particular verificando

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es la que tiene coeficientes $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, y $c_3 = 0$, es decir

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Ejercicio 6.** Sean

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y sea $A$ la matriz $3 \times 2$ cuyas columnas son $\mathbf{u_1}/\|\mathbf{u_1}\|$ y $\mathbf{u_2}/\|\mathbf{u_2}\|$.

a) *(0,5 puntos)* Calcula las coordenadas de $\mathbf{v}$ en la base ortogonal formada por $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.

Solución: Las coordenadas son

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_1\|^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_2\|^2} = -\frac{1}{6} \quad \text{y} \quad \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_3\|^2} = \frac{1}{3},$$

es decir, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3$.

b) *(0,5 puntos)* Calcula el vector del espacio generado por $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ más cercano a $\mathbf{v}$.

Solución: El vector pedido es la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre el espacio generado por $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$,

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\, \mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\, \mathbf{u}_1 - \frac{1}{6}\, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

c) *(0,5 puntos)* Calcula un vector $\mathbf{w}$ que sea perpendicular a $\mathbf{u_3}$ y que pertenezca al espacio generado por los vectores $\mathbf{u_3}$ y $\mathbf{v}$.

Solución: Un vector $\mathbf{z}$ cumpliendo estas condiciones se obtiene aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt,

$$\mathbf{z} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}_3\|^2}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

(el vector coincide con el obtenido en el apartado anterior, lo cual, como puede verse fácilmente con la ayuda de un dibujo, no es una coincidencia). Cualquier múltiplo del vector $\mathbf{z}$, $\lambda\mathbf{z}$, cumple también las condiciones requeridas.

d) *(0,5 puntos)* Expresa en función de $A$ y de $A^\top$ la proyección ortogonal de un vector $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$ en el espacio generado por $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$.

Solución: Sea $V$ el espacio generado por $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ (equivalentemente, por las columnas de $A$). Las columnas de $A$ forman una base ortonormal de $V$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}/\|\mathbf{u_1}\|, \mathbf{u_2}/\|\mathbf{u_2}\|\}$. El vector de coordenadas en la base $\mathcal{B}$ de la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $V$ es $A^\top\mathbf{y}$. Entonces, la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $V$ es $AA^\top\mathbf{y}$.

e) *(0,5 puntos)* Encuentra el vector $\mathbf{x}$ tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ sea mínima.

Solución: Como $A^\top A = I$, de las ecuaciones normales $A^\top A\mathbf{x} = A^\top\mathbf{v}$ se obtiene que

$$\mathbf{x} = A^\top\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Otro posible razonamiento que también conduce a la solución es: $\|A\mathbf{x} - \mathbf{v}\|$ es mínima cuando $\mathbf{x}$ es el vector de coordenadas en la base $\mathcal{B}$ (en la notación del apartado anterior) de la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre $V$, o equivalentemente, cuando $\mathbf{x} = A^\top\mathbf{v}$.