ÁLGEBRA LINEAL

EXAMEN EXTRAORDINARIO **2 de julio de 2012**

Duración del examen: 3 horas

Fecha publicación notas: 11 de julio **Fecha revisión examen:** 13 de julio

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

Grupo: ________ **Titulación:** ______________________

ESCRIBA EL APELLIDO Y EL NOMBRE EN TODAS LAS HOJAS.

Ejercicio 1. (*1 punto*) *Determina, utilizando un sistema de ecuaciones lineales, un polinomio $p(x)$ de grado 2 que verifique*

$$p(1) = 2, \quad p(2) = 1, \quad p(3) = 3$$

Indica si existe un único polinomio verificando estas condiciones.

Solución. Denotando $p(x) = ax^2 + bx + c$, las condiciones impuestas se pueden escribir como

$$p(1) = a + b + c = 2, \quad p(2) = 4a + 2b + c = 1, \quad p(3) = 9a + 3b + c = 3$$

Las equivalencias por filas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

muestran que la solución al anterior sistema es única, y viene dada por

$$a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{11}{2}, \quad c = 6$$

Por tanto

$$p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$$

es el un único polinomio verificando las condiciones dadas.

Ejercicio 2. *(1 punto) Sea* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Calcula una base del espacio nulo de A.*

Solución. Se obtiene fácilmente que la forma escalonada reducida de $[A|\mathbf{0}]$ es

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Entonces $\mathrm{Nul}(A)$ es el conjunto de vectores $(x_1, x_2, \ldots, x_8) \in \mathbb{R}^8$ que satisfacen

$$x_3 = -x_4 - x_7 - x_8, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

o equivalentemente, es el conjunto de vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_8 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con $x_1, x_2, x_4, x_7, x_8 \in \mathbb{R}$. Por tanto, una base de $\mathrm{Nul}(A)$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Apellidos: ______________________ **Nombre:** ______________

Ejercicio 3. *Sean A la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *la aplicación definida por* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *y* $H : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ *la aplicación definida por* $H(\mathbf{x}) = T\big(T(\mathbf{x})\big)$.

a) (*0,5 puntos*) *Calcula la matriz (con respecto a la base canónica) de H*

Solución.

La matriz de $H(\mathbf{x}) = T\big(T(\mathbf{x})\big)$ es

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) (*0,5 puntos*) *Calcula la matriz (con respecto a la base canónica) de la aplicación inversa de T.*

Solución.

Como la matriz de T es A, la matriz de la aplicación inversa de T es A^{-1}. De las equivalencias por filas

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

se obtiene que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. *Sea* $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Gen}\{1, t, t^2\}$ *el conjunto de polinomios de hasta segundo grado en la variable* t*. Sea* $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ *la aplicación lineal que verifica*

$$T(1) = (1,0,0), \qquad T(t) = (1,1,0), \qquad T(t^2) = (1,2,1)$$

a) (1 punto) Encuentra la matriz $A = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{P}}$ *de la aplicación* T *respecto de las bases* $\mathscr{P} = \{1, t, t^2\}$ *en* $\mathbb{P}_2$ *y* $\mathscr{E}$ *(la base canónica) en* $\mathbb{R}^3$*.*

Solución.

La matriz es la formada por las imágenes bajo T de los vectores de la base $\mathscr{P}$, en coordenadas de la base $\mathscr{E}$:

$$A = \Big[\, [T(1)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [T(t)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [T(t^2)]_{\mathscr{E}} \,\Big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) (0.5 puntos) Comprueba que $\mathscr{Q} = \{1, t-1, (t-1)^2\}$ *es base de* $\mathbb{P}_2$*.*

Solución. $\mathbb{P}_2$ tiene dimensión 3 y $\mathscr{Q}$ tiene 3 vectores, luego $\mathscr{Q}$ será base si es un conjunto linealmente independiente. Esto se puede comprobar usando el isomorfismo de coordenadas y calculando el determinante de la matriz $P_{\mathscr{P}\leftarrow\mathscr{Q}}$ de los vectores de $\mathscr{Q}$ en coordenadas de $\mathscr{P}$:

$$\det\Big[\, [1]_{\mathscr{P}} \;\Big|\; [t-1]_{\mathscr{P}} \;\Big|\; [(t-1)^2]_{\mathscr{P}} \,\Big] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathscr{Q} \text{ es base}$$

c) (1 punto) Calcula la matriz $B = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{Q}}$ *de* T *respecto de las bases* $\mathscr{Q}$ *en* $\mathbb{P}_2$ *y* $\mathscr{E}$ *en* $\mathbb{R}^3$*.*

Solución. Se puede calcular $B = \Big[\, [T(1)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [T(t-1)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [T((t-1)^2)]_{\mathscr{E}} \,\Big]$ utilizando la matriz $A = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{P}}$ calculada en el apartado a):

$$[T(1)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(t-1)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T((t-1)^2)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y entonces $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. También, se podría hacer con el siguiente cálculo

$$B = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{Q}} = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{P}} P_{\mathscr{P}\leftarrow\mathscr{Q}} = A P_{\mathscr{P}\leftarrow\mathscr{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apellidos: ______________________________ **Nombre:** ________________

Ejercicio 5. *Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es*

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 6\\ -6 & 8 & 16\\ 2 & -2 & -4\end{bmatrix}$$

a) (*0.5 puntos*) *Estudia si la matriz A es diagonalizable.*

Solución. El polinomio caracteristico de A es

$$p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 3 & 6\\ -6 & 8-\lambda & 16\\ 2 & -2 & -4-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda^2-3\lambda+2)$$

de donde se deduce que los autovalores son $\lambda=0, \lambda=1, \lambda=2$, tres autovalores distintos y por tanto la matriz es diagonalizable.

b) (*1.5 puntos*) *Encuentra un base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la aplicación T admita una representación matricial diagonal.*

Solución. Los vectores propios correspondientes al valor propio $\lambda=0$ son las soluciones (distintas del vector 0) del sistema

$$\begin{bmatrix}-1 & 3 & 6\\ -6 & 8 & 16\\ 2 & -2 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Una solución de este sistema es $(0,-2,1)$. Análogamente, solucionando los sistemas

$$\begin{bmatrix}-2 & 3 & 6\\ -6 & 7 & 16\\ 2 & -2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}-3 & 3 & 6\\ -6 & 6 & 16\\ 2 & -2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

obtenemos los vectores propios $(3,-2,2)$ y $(1,1,0)$ correspondientes respectivamente a los valores propios $\lambda=1.$ y $\lambda=2$. Por tanto, respecto de la base

$$\mathcal{B}=\{(0,-2,1),(3,-2,2),(1,1,0)\}$$

el endomorfismo tiene una matriz diagonal *c)* *(0.5 puntos) Encuentra una matriz P y una matriz diagonal D tal que $A^{10} = P * D * P^{-1}$.*

Solución. La base

$$\mathcal{B} = \{(0,-2,1),(3,-2,2),(1,1,0)\}$$

calculada en el anterior apartado, proporciona la diagonalización

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Entonces

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

Por tanto para

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

se verifica $A^{10} = P * D * P^{-1}$.

Ejercicio 6. *Sea W el espacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v} = (0,3,4)$ y $\mathbf{w} = (1,0,25)$*

a) *(0,75 puntos) Calcula $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{\mathbf{v},\mathbf{u}\}$ sea base ortogonal de W.*

Solución. Utilizando el método de ortogonalización de Gram Schmidt se obtiene

$$\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathrm{Proy}_{\mathrm{Gen}(\mathbf{v})}\mathbf{w} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix} - \frac{100}{25}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b) *(0,75 puntos) Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b} = (226,0,0)$ sobre W.*

Solución.

$$\mathrm{Proy}_W\mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} = \frac{226}{226}\mathbf{u} = \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix}$$

c) *(0,5 puntos) Calcula la distancia de $\mathbf{b}$ a W.*

Solución.

$$\text{distancia}(\mathbf{b}, W) = \left\|\mathbf{b} - \mathrm{Proy}_W\mathbf{b}\right\| = \left\|(225,12,-9)\right\| = \sqrt{50850}$$