Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha:** 9 de Julio de 2013

Fecha publicación notas: 15 de Julio de 2013 **Fecha revisión examen:** 18 de Julio de 2013

Duración del examen: 3 horas

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

---

1. *(0,5 puntos)* Encuentra todos los pesos c_1, c_2, c_3, c_4 que verifican

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Nótese que la ecuación vectorial que verifican los pesos se puede escribir matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para resolver este sistema, calculamos la forma escalonada reducida de la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Un sistema equivalente es pues $\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_4 = 1 \\ c_3 + 2c_4 = -1 \end{cases}$. Podemos describir las soluciones como

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 - 2c_2 + c_4 \\ c_3 &= -1 - 2c_4 \qquad\qquad c_2, c_4 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. *(0,5 puntos)* Calcula la recta mínimos cuadrados (o de regresión) para los datos {(1,3), (2,7), (3,7)}

Solución: Los coeficientes de la recta de regresión $y = \beta_1 x + \beta_0$ son la solución mínimos cuadrados de

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales son

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 38 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es $\beta_0 = 5/3, \beta_1 = 2$ y por tanto la recta de regresión es $y = 2x + \dfrac{5}{3}$.

3. *(1,5 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}05$ por cada respuesta errónea)*

Sea $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \mathbf{a_3} \end{bmatrix}$ una matriz cuadrada 3×3 de rango 2 con columnas $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$, $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, y $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{v}$ vectores no nulos verificando $T(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$ y $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y los vectores $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{v}$).

El conjunto solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un espacio vectorial de dimensión 2	N
El conjunto solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un espacio vectorial	N
T es suprayectiva	N
La matriz $[A \;\; \mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en la última columna	N
Existen números $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ no todos nulos tales que $\lambda_1\mathbf{a_1} + \lambda_2\mathbf{a_2} + \lambda_3\mathbf{a_3} = \mathbf{0}$	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	S
T es inyectiva	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ tiene infinitas soluciones para todo $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$	N
$\mathbf{c} + \mathbf{v}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	S
$\mathbf{c} - \mathbf{v}$ es una solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	S
El rango de $[A \;\; \mathbf{b}]$ es 3	N
$\mathbf{a_3}$ es combinación lineal de $\mathbf{a_1}$ y $\mathbf{a_2}$	X
A tiene 2 posiciones pivote	S
El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	S
$\{\mathbf{v}\}$ es una base del espacio nulo de A	S

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

4. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio de las matrices 2×2 y sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ la transformación lineal que transforma una matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ en $A + A^\top$, donde $A^\top$ denota la matriz transpuesta de A.

   a) *(0,2 puntos)* ¿Pertenece la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ al núcleo (o espacio nulo) de T? (justifica la respuesta)

   Solución: Sí, ya que $T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) *(0,2 puntos)* Describe el núcleo de T

   Solución: El núcleo de T son las matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ verificando

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   o equivalentemente verificando $a = d = 0$, $c + b = 0$. Por tanto $\text{Nul T} = \left\{\lambda \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

   c) *(0,2 puntos)* ¿Pertenece la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ a la imagen (o rango) de T? (justifica la respuesta)

   Solución: No, ya que si $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $b + c = 1$ y $c + b = -1$ lo cual no es posible.

   d) *(0,2 puntos)* ¿es T suprayectiva? ¿es T inyectiva?

   Solución: No es suprayectiva ya que según el apartado d) hay una matriz 2×2 que no esta en el espacio imagen. No es inyectiva ya que según el apartado a) hay un matriz no nula en el núcleo de T.

   e) *(0,7 puntos)* Encuentra la matriz de T respecto de la base $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

   Solución: Las coordenadas de los transformados de la base

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   son respectivamente $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   Entonces, la matriz pedida es $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. Sean $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$, $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (x, x-y)$

a) *(0,5 puntos)* Calcula $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{E}$ a la base $\mathcal{B}$.

Solución: La matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{E}$ es $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y entonces

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ (la $\mathcal{B}$-matriz de T)

Solución: Los transformados de la base $\mathcal{B}$ son $T(1,1) = (1,0)$ y $T(1,0) = (1,1)$, cuyas $\mathcal{B}$-coordenadas son respectivamente $[(1,0)]_{\mathcal{B}} = (0,1)$ y $[(1,1)]_{\mathcal{B}} = (1,0)$. Entonces la $\mathcal{B}$-matriz de T es $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de T^2 en la base $\mathcal{E}$ (T^2 denota la aplicación $T^2(x,y) = T\big(T(x,y)\big)$)

Solución: La matriz de T en la base $\mathcal{E}$ es $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces la matriz de T^2 en la base $\mathcal{E}$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la inversa de T en la base $\mathcal{B}$ (la $\mathcal{B}$-matriz de T^{-1})

Solución: Según el apartado anterior $T^2 = I$ y entonces $T^{-1} = T$. Por tanto la matriz pedida es la calculada en el apartado b), $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. *(1 punto)* Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcula la proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = (2,1,1)$ sobre el espacio columna de A, Col A. Calcula un vector ortogonal a Col A de norma 3.

Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{b} = (2,1,1)$ sobre Col A es

$$\mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}A}\mathbf{b} = \frac{(2,1,1)\cdot(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(2,1,1)\cdot(0,-1,1)}{\|(0,-1,1)\|^2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vector ortogonal a Col A es $\mathbf{b} - \mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

Un vector ortogonal a Col A de norma 3 es $\dfrac{3}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

7. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) *(1 punto)* Calcula $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ sabiendo que $A\mathbf{v}_1 = 6\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_3$

Solución: Los datos dados nos permiten conocer la diagonalización

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) *(1 punto)* Diagonaliza ortogonalmente la matriz A calculada en el apartado anterior, es decir encuentra una matriz D diagonal, y una matriz Q ortogonal tal que $A = QDQ^\top$.

Solución: Aplicando Gram-Schmidt a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

obtenemos una base ortogonal de autovectores $\{\mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$. Normalizando estos vectores construimos la matriz ortogonal Q y la diagonalización ortogonal

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = Q \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} Q^T$$

8. *(0.5 puntos)* Encuentra una base del espacio vectorial formado por las soluciones de la ecuación

$$y'' + y = 0$$

Solución: La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$. Sus raíces son $r = j$ y $r = -j$. Entonces, una base del espacio de soluciones es $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

9. *(0.5 puntos)* Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calcula el determinante de A, de A^2 y de A^{-1}.

Solución:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto

$$\det(A^2) = (-18)^2 = 324, \qquad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{18}$$