Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL	**Fecha:** 6 de Julio de 2015
Fecha publicación notas: 16 de Julio de 2015	**Fecha revisión examen:** 20 de Julio de 2015

Duración del examen: 2 horas y media

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

---

1. *(1 punto: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y −0,1 por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz y $\mathbf{b}$ un vector columna tales que la forma escalonada reducida de la matriz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sean $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^5$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y $\mathbf{c}$ un vector columna de $\mathbb{R}^5$.

Sean $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ la primera, la segunda y la tercera columna de A respectivamente, es decir

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$).

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	N
Existe un único vector $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$	S
T es suprayectiva	N
$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ es una base del espacio imagen de T	S
$2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$	S
$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_3$	N
$\mathbf{b}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$	S
Existe un único vector $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$	X
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene solución única	X
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene infinitas soluciones	N

2. *(2 puntos)* Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que verifica

$$T(1,0,0) = (1,0), \quad T(0,1,0) = (2,1), \quad T(0,0,1) = (1,1)$$

Sea $G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $G(x,y) = (y,-x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calcula una base del núcleo o espacio nulo de T

Solución: Los transformados de la base estándar de $\mathbb{R}^3$ (que proporciona el enunciado del problema) colocados por columnas nos proporcionan la matriz estándar de T,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El núcleo de T coincide con el conjunto solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. La forma escalonada reducida de la matriz ampliada de este sistema viene dada por la equivalencia por filas

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son los vectores (x,y,z) que verifican

$$x = z, \quad y = -z$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

En consecuencia, una base del núcleo de T es $\{(1,-1,1)\}$.

b) Calcula los vectores (x,y,z) que verifican $G\big(T(x,y,z)\big) = (1,1)$

Solución: La matriz estándar de G es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

y la matriz de la composición $G\big(T(x,y,z)\big)$ es

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} B & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

los vectores verificando $G\big(T(x,y,z)\big) = (1,1)$, son los que cumplen

$$x = -3 + z, \quad y = 1 - z$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

3. *(2 puntos)* Sea $\mathcal{B} = \{(x-1)^2, 2(x-1), 2\}$ un conjunto de $\mathbb{P}_2$ (espacio de polinomios de grado menor o igual que 2)

 a) Demuestra que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{P}_2$

 Solución: Las coordenadas de $(x-1)^2 = 1 - 2x + x^2$, $2(x-1) = -2 + 2x$ y 2 en la base estándar $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ son respectivamente $(1, -2, 1)$, $(-2, 2, 0)$ y $(2, 0, 0)$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{P}_2$ si y sólo si estos tres vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$, lo cual se verifica si y sólo si la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 es no singular. Como el determinante de esta matriz es -4, la matriz es no singular, lo que demuestra que $\mathcal{B}$ es base de $\mathbb{P}_2$.

 b) Calcula la matriz del cambio de base, de la base canónica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ a $\mathcal{B}$

 Solución: La matriz $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{E}$ es la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{E}$, $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La matriz $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}$ de cambio de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ es la inversa de $P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$. Como

$$\begin{bmatrix} P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} & I \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

 la matriz pedida es $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = P^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

 c) Calcula las coordenadas del polinomio $p(x) = 1 + 2x - 2x^2$ en la base $\mathcal{B}$.

 Solución: El vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $p(x)$ en $\mathcal{B}$ es

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[p(x)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

 o en otras palabras, las coordenadas de $p(x)$ en $\mathcal{B}$ son $(-2, -1, 1/2)$.

4. *(1 punto)* Calcula la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = x$

Solución: La ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea asociada es $k^2 + 2k + 1 = 0$. Como $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, la ecuación característica tiene únicamente la raíz $k = -1$ que es doble. Entonces dos soluciones independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada $y'' + 2y' + y = 0$ son e^{-x} y $x\,e^{-x}$. Como x (el termino en el lado derecho ecuación) es de la forma $P(x)e^{\alpha x}$ siendo $P(x) = x$ un polinomio de grado 1 y $\alpha = 0$ un número que no es raíz de la ecuación característica, existe una solución del mismo tipo $y = (ax+b)(e^{\alpha x}) = ax + b$. Para esta solución se tiene $y' = a$, $y'' = 0$. Sustituyendo en la ecuación $y'' + 2y' + y = x$ se obtiene

$$y'' + 2y' + y = 2a + ax + b = x$$

de donde necesariamente $a = 1$ y $b = -2$. Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = x - 2 + C_1 e^{-x} + C_2 x\,e^{-x}$$

5. *(1 punto)* Calcula la recta de regresión (o de mínimos cuadrados) de los datos

$$(-2, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 0)$$

Solución: La recta de regresión $y = \beta_0 + \beta_1 x$ es aquella cuyos coeficientes β_0, β_1 son la solución mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales son

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & -26 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & -3/26 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 27/26 \\ 0 & 1 & -3/26 \end{bmatrix}$$

la solución mínimos cuadrados es $\beta_0 = 27/26, \beta_1 = -3/26$, y entonces la recta de regresión es

$$y = -\frac{3}{26}x + \frac{27}{26}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

6. *(1,5 puntos)* Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcula los valores de k reales tales que la matriz A es diagonalizable utilizando exclusivamente valores propios reales (tales que A se pueda diagonalizar sin utilizar números complejos)

Solución: El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & k \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - k = \lambda^2 - \lambda - k$$

El discriminante de la ecuación característica $\lambda^2 - \lambda - k = 0$ es $1 + 4k$. Distinguimos 3 casos:

- Si $k > -1/4$ el discriminante es estrictamente positivo. En consecuencia, existen dos valores propios reales distintos y la matriz es diagonalizable.
- Si $k = -1/4$ existe un único valor propio $\lambda = 1/2$. El subespacio propio asociado es el espacio nulo de la matriz

$$\det\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/4 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

  que tiene dimensión 1. Por tanto, en este caso la matriz no es diagonalizable.
- Si $k > -1/4$ el discriminante es estrictamente negativo, la matriz no tiene entonces valores propios reales y en consecuencia no es diagonalizable sin utilizar números complejos.

Por tanto la matriz es diagonalizable, utilizando sólo números reales, cuando $k > -1/4$.

b) Diagonaliza A cuando $k = 1$

Solución: Cuando $k = 1$ el polinomio característico es $\lambda^2 - \lambda - 1$ cuyas raíces son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. El espacio propio asociado a λ_1 es el espacio nulo de la matriz

$$\det(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

que esta formado por los vectores (x, y) que verifican $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x + y = 0$. Un vector propio asociado a λ_1 es $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

El espacio propio asociado a λ_2 es el espacio nulo de la matriz $\det(A - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$ que esta formado por los vectores (x, y) que verifican $-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x + y = 0$. Un vector propio asociado a λ_2 es $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7. *(1,5 puntos)* Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

a) Calcula una base ortogonal del espacio columna de A

Solución: Se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lo que muestra que las dos primeras columnas de A forman una base de Col A. Para obtener una base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ aplicamos el procedimiento de Gram-Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{\mathbf{u_1} \cdot (4,5,6)}{\|\mathbf{u_1}\|^2}\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \frac{16}{7}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

b) Calcula una base del complemento ortogonal de Col A (del espacio ortogonal al espacio columna de la matriz A).

Solución: El espacio $[\mathrm{Col}\,(A)]^\perp$ esta formado por los vectores ortogonales a una base de Col(A), por ejemplo a $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$. Así, $[\mathrm{Col}\,(A)]^\perp$ esta formado por los vectores (x,y,z) que verifican

$$(1,2,3)\cdot(x,y,z) = 0 \text{ y } (4,5,6)\cdot(x,y,z) = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

se obtiene que el sistema anterior es equivalente a $x = z$, $y = -2z$. Así, una base de $[\mathrm{Col}\,(A)]^\perp$ es

$$\{(1,-2,1)\}$$

Otro método de calcular esta base es continuar aplicando el proceso de Gram-Schmidt añadiendo un tercer vector $\mathbf{v}$ no perteneciente a Col A. De esta manera obtendremos un vector $\mathbf{u_3} \perp \mathrm{Col}(A)$. Para facilitar los cálculos utilizamos $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u'}_2 = \frac{7}{3}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ obtenemos

$$\mathbf{u_3} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u'}_2}{\|\mathbf{u'}_2\|^2}\mathbf{u'}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{4}{21}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

Entonces, una base de $(\mathrm{Col}A)^\top$ es $\{6(1/6,-1/3,1/6)\} = \{(1,-2,1)\}$.