Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha del examen:** 27 de Junio de 2016

Fecha publicación notas: 4 de Julio de 2016 **Fecha revisión examen:** 7 de Julio de 2016

Duración del examen: 2 horas y 30 minutos

APELLIDOS:

NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

---

1. Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$x + y + 4z = 0$$
$$x - 2y + z = 0$$
$$x + 2y + 5z = 0$$

a) *(0,2 puntos)* Determina una matriz A cuyo espacio nulo sea V.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b) *(1 punto)* Calcula la matriz escalonada reducida de A, unas ecuaciones vectoriales paramétricas del subespacio V y una base de V.

Solución: Se tiene que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y entonces la matriz escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $\begin{bmatrix} A & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, el espacio V está formado por los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que verifican $x = -3z$, $y = -z$, o equivalentemente por los vectores que se pueden escribir como $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Una base de V es $\{(-3, -1, 1)\}$.

c) *(0,3 puntos)* Calcula la dimensión y una base de $\operatorname{Col} A$ (espacio generado por los vectores columna de A).

Solución: Como las dos primeras columnas de A tienen una posición pivote, forman una base de $\operatorname{Col} A$, o, con otras palabras, $\{(1, 1, 1), (1, -2, 2)\}$ es una base de $\operatorname{Col} A$. La dimensión de $\operatorname{Col} A$ es 2.

2. *(1 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}1$ por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz 25×10 de rango 10, $T : \mathbb{R}^{10} \mapsto \mathbb{R}^{25}$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{10}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{25}$ y $\mathbf{b} = A\mathbf{a}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$).

T es suprayectiva	N
T es inyectiva	S
Existen infinitos vectores $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$	N
El espacio nulo de T es $\{\mathbf{0}\}$	S
Existen infinitos vectores $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$	N
Existe un único vector $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$	X
El vector $\mathbf{c}$ pertenece a la imagen de T	X
El vector $\mathbf{b}$ pertenece a la imagen de T	S
Las columnas de A son independientes	S
Las columnas de A forman una base del espacio imagen de T	S

3. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas 2×2. Sea S el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ formado por las matrices 2×2 simétricas.

   a) *(0,6 puntos)* Encontrar una base de S.

   Solución: Cualquier matriz simétrica 2×2 se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Entonces las matrices simétricas $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son un sistema de generadores de S. Como además son evidentemente linealmente independientes,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   es una base de S.

   b) *(0,4 puntos)* Hallar las coordenadas de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ respecto a la base calculada en el apartado anterior.

   Solución: Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Las coordenadas de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ respecto a $\mathcal{B}$ son $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

APELLIDOS:

4. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_2, x_3)$ y sea $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $S(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 - x_4$.

   a) *(0,7 puntos)* Describe el espacio nulo y el espacio imagen de la transformaciones T y S. Proporciona una base de estos espacios cuando no sean el $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}$.

   Solución: Imagen $T = \mathbb{R}^4$, Núcleo $T = \{\mathbf{0}\}$, Imagen $S = \mathbb{R}$. El núcleo de S esta formado por los vectores de $\mathbb{R}^4$ que cumplen $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Tiene dimensión 3 ya que es el espacio nulo de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ que tiene rango 1. Por tanto, una base del núcleo de S está formada por 3 vectores linealmente independientes que verifiquen $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$, por ejemplo por

   $$(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)$$

   que son independientes puesto que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) *(0,2 puntos)* ¿Es T invertible? (justifica la respuesta)

   Solución: Sí, T es invertible pues Imagen $T = \mathbb{R}^4$ y Núcleo $T = \{\mathbf{0}\}$. También se podría deducir que T es invertible observando que la matriz estándar de T, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene columnas linealmente independientes.

   c) *(0,2 puntos)* ¿Es 0 un valor propio de T? (justifica la respuesta)

   Solución: No, ya que el espacio nulo de T es $T = \{\mathbf{0}\}$, y entonces no existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que $T(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

   d) *(0,2 puntos)* ¿Es la matriz estándar o canónica de T ortogonal? (justifica la respuesta)

   Solución: Sí, ya que las columnas de la matriz estándar de T, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ son ortogonales y tienen norma 1.

   e) *(0,7 puntos)* Calcula la matriz de la composición $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = S\big(T^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big)$

   Solución: Como la matriz estándar de T es ortogonal, la matriz de T^{-1} es la traspuesta de la matriz de T. Entonces la matriz de $H(x_1, x_2, x_3, x_4) = S\big(T^{-1}(x_1, x_2, x_3, x_4)\big)$ es

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. *(1,5 puntos)* Calcula la proyección ortogonal del vector $(10,0,0,0,0)$ sobre el subespacio V formado por los vectores $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$ que verifican

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 - x_5 &= 0\\ x_2 - x_5 &= 0\\ x_4 + x_5 &= 0\end{aligned}$$

Solución: El subespacio V es el conjunto de soluciones del sistema con matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0\end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & | & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0\end{bmatrix}$$

el subespacio V esta formado por los vectores verificando

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_5\\ x_2 &= x_5\\ x_3 &= x_3\\ x_4 &= -x_5\\ x_5 &= x_5\end{aligned} \quad , \qquad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + x_5\begin{bmatrix}2\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Una base de este espacio esta formada por $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$. Para calcular una base ortogonal utilizamos el procedimiento de Gram-Schmidt. Una base ortogonal está formada por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\\-1\\1\end{bmatrix} - \frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

La proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = (10,0,0,0,0)$ sobre V es

$$\operatorname{Proy}_V \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{10}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{10}{5}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\2\\3\\-2\\2\end{bmatrix}$$

APELLIDOS:

6. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, sea

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen}^2(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 1+\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son vectores propios de la matriz A_α:

a) *(0,7 puntos)* Calcula los valores propios de A_α.

Solución: Como

$$A_\alpha\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen}^2(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 1+\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1$$

$$A_\alpha\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen}^2(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 1+\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{p}_2$$

$$A_\alpha\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen}^2(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) & 1+\cos^2(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{p}_3$$

se tiene que los valores propios de A_α son 1, 2 y 3.

b) *(0,3 puntos)* Sea P la matriz 3×3 cuyas columnas son $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. ¿Es P una matriz ortogonal? (justifica la respuesta)

Solución: Sí, ya que $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha) = 0$, $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$, $\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$, $\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\| = \sqrt{\operatorname{sen}(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2} = 1$ y $\|\mathbf{p}_3\| = 1$. Se puede justificar también comprobando que $P^\top P = I$.

c) *(0,5 puntos)* Diagonaliza A_α ortogonalmente.

Solución:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) *(0,3 puntos)* Utilizando el apartado anterior, diagonaliza ortogonalmente A_α^5.

Solución:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. *(1,2 puntos)* Encuentra la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 5,\ y'(0) = -2$$

Solución: La ecuación característica de la ecuación es $k^2 + 2k - 8 = 0$. Las raíces son $k = 2$ y $k = -4$. Entonces la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x}$$

Como $y'(x) = -4C_1 e^{-4x} + 2C_2 e^{2x}$, las constantes C_1, C_2 tienen que verificar

$$y(0) = C_1 + C_2 = 5, \quad y'(0) = -4C_1 + 2C_2 = -2$$

La matriz ampliada de este sistema de ecuaciones es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ -4 & 2 & | & -2 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ -4 & 2 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 6 & | & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Entonces la solución al sistema es $C_1 = 2$, $C_2 = 3$ y la solución de la ecuación que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = 2e^{-4x} + 3e^{2x}$$