Fecha: 4 de julio de 2019 | Duración del examen: 3 horas

Publicación notas: 9 de julio de 2019 | Revisión del examen: 12 de julio de 2019

APELLIDOS:

NOMBRE: DNI:

---

1. *(1 punto: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y −0,05 por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz 10×4 de rango 4 y $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^{10}$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Sean $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ dos vectores diferentes de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{10}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{v}$).

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ tiene una única solución	X
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ tiene infinitas soluciones	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	N
La transformación T es inyectiva	S
$T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{c})$	N
El espacio imagen de T es Col A	S
$\mathbf{v}$ es combinación lineal de las columnas de A	X
El rango de $A^\top$ (la matriz traspuesta de A) es 4	S
Las columnas de A son independientes	S
Hay 4 filas de A que forman una base de $\mathbb{R}^4$	S

2. Consideramos las transformaciones $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$T(x, y) = (2x + y, x), \quad G(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

(a) *(0,3 puntos)* Calcula $T^{-1}(1, 3)$

Solución: La matriz de T es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y entonces

$$T^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

(b) *(0,3 puntos)* Calcula la matriz de la transformación $T \circ G^{-1}$ (definida por $T \circ G^{-1}(x, y) = T\big[G^{-1}(x, y)\big]$)

Solución: La matriz de T es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y la de G es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces la matriz de $T \circ G^{-1}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) *(0,2 puntos)* Determina el núcleo y la imagen de G

Solución: G es biyectiva y por tanto Núcleo $G = \big\{(0, 0)\big\}$ e Imagen $G = \mathbb{R}^2$.

3. Consideramos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ dados por

$$S = \text{Gen}\Big\{(1,1,0,1),(1,1,0,0),(1,1,0,2)\Big\} \quad \text{y} \quad T = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\Big\}$$

(a) *(0,4 puntos)* Calcula una base y la dimensión de S.

Solución: Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces $\big\{(1,1,0,1),(1,1,0,0)\big\}$ es una base de S y Dim $S = 2$.

(b) *(0,4 puntos)* Calcula una base y la dimensión de T.

Solución: El espacio T es el espacio nulo de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Como A tiene Rango 2 y Dim Nul $A+$ Rango $A=4$, la dimensión de T es 2. Cualesquiera dos vectores independientes cumpliendo las ecuaciones de T proporcionaran una base de T, por ejemplo $\{(1,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$. También sería posible calcular una base de T (y entonces su dimensión) resolviendo el sistema con matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$.

(c) *(0,1 puntos)* ¿Son S y T el mismo subespacio? justifica la respuesta.

Solución: No lo son pues el vector $(1,1,0,1)$ que está en S, no pertenece a T ya que no verifica $z + t = 0$.

4. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_0 + a_1)$.

(a) *(0,4 puntos)* Calcula la matriz de T respecto a la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Como $T(1) = (1,0,1)$, $T(x) = (0,1,1)$ y $T(x^2) = (0,0,0)$ la matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) *(0,4 puntos)* Calcula el núcleo (o espacio nulo) de T y una base del núcleo de T.

Solución: El núcleo de T está formado por aquellos vectores que verifican $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0, a_1, a_0 + a_1) = (0,0,0)$ o equivalentemente $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$. Por tanto, el núcleo de T está formado por los polinomios de la forma a_2x^2. Con otras palabras, Núcleo $T = \{\, a_2\, x^2 \; : \; a_2 \in \mathbb{R}\}$ o también Núcleo $T = \text{Gen}\,\{x^2\}$. Una base del núcleo de T es $\{x^2\}$.

(c) *(0,2 puntos)* ¿Es T inyectiva? justifica la respuesta.

Solución: No es inyectiva ya que $T(x^2) = T(0) = (0,0,0)$.

APELLIDOS:

5. *(0,4 puntos)* Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$. Sabiendo que la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$ es $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ y que las coordenadas de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ en la base $\mathcal{C}$ son $(1,2)$ calcular las coordenadas de $\mathbf{b}$ en la base $\mathcal{B}$.

   Solución: Se tiene que

$$[\mathbf{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{b}]_{\mathcal{C}} = P^{-1}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{b}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Sea $\mathcal{M}_{2\times2}$ el espacio de las matrices 2×2 y $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2} \,:\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   (a) *(0,3 puntos)* Encuentra una base de V

   Solución: Como cualquier matriz de V, $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ se puede expresar como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   y las matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son linealmente independientes, una base de V es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

   (b) *(0,3 puntos)* Sea $T : V \to V$ la transformación lineal definida por $T \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{bmatrix}$. Determina la matriz de T respecto a la base que has calculado en el apartado anterior.

   Solución: Como $T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. *(0,4 puntos)* Calcula la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1$$

   Solución: El polinomio característico de la ecuación es $k^2 + 1$ que tiene raíces $k = j$ y $k = -j$. La solución general es por tanto $y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \operatorname{sen}(x)$. Como $y(0) = C_1$ e $y'(0) = C_2$ la solución es

$$y(x) = \cos(x) + \operatorname{sen}(x)$$

8. El polinomio característico de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda - 2)^2$.

(a) *(0,3 puntos)* ¿Son $(1,1,1,1)$ y $(1,1,-1,-1)$ vectores propios de A? justifica la respuesta

Solución: Se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto $(1,1,1,1)$ y $(1,1,-1,-1)$ son vectores propios de A correspondientes al valor propio 2.

(b) *(1 punto)* ¿Es A diagonalizable? en caso afirmativo, calcula una matriz D diagonal y una matriz P no singular (invertible) tales que $A = PDP^{-1}$

Solución: Según lo calculado en el apartado anterior el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ tiene dimensión 2 (la máxima posible, pues $\lambda = 2$ es raíz doble del polinomio característico).

El espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 0$ es el espacio nulo de A. Podemos calcular una base de este espacio resolviendo el sistema con matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y ecuaciones} \quad x_1 = -x_2, x_3 = -x_4$$

Una base es $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$. La matriz A es por tanto diagonalizable. Según lo visto en el apartado anterior , $\{(1,1,1,1),(1,1,-1,-1)\}$ es una base del espacio propio asociado a $\lambda = 2$. Entonces $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) *(0,3 puntos)* ¿Es A diagonalizable ortogonalmente? ¿Son los vectores propios asociados al valor propio 2 ortogonales al espacio nulo de A? justifica la respuesta

Solución: Sí y sí: A es diagonalizable ortogonalmente porque es simétrica y los vectores propios asociados al valor propio 2 son ortogonales al espacio propio asociado a $\lambda = 0$ que es Nul A.

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) *(0,5 puntos)* Calcula una base ortogonal del espacio columna de A que contenga al vector $(1, 1, -1)$.

Solución: Para construir una base ortogonal $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ de $\operatorname{Col} A$ que contenga al vector $(1, 1, -1)$, aplicamos el proceso de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v_1} &= (1, 1, -1) \\ \mathbf{v_2} &= (1, 1, 0) - \frac{(1,1,0)\cdot(1,1,-1)}{\|(1,1,-1)\|^2}(1,1,-1) = (1,1,0) - \frac{2}{3}(1,1,-1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Podemos tomar como base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, o bien, escalando $\mathbf{v_2}$ para eliminar denominadores, podemos tomar como base ortogonal a $\{(1, 1, -1), (1, 1, 2)\}$.

(b) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Col} A$, es decir, la matriz P tal que

$$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{x} = P\,\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Para hallar una base ortonormal de $\operatorname{Col} A$, normalizamos los vectores de la base ortogonal obtenida en el apartado anterior. Así, una base ortonormal de $\operatorname{Col} A$ es

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) \right\}.$$

La matriz de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Col} A$ es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) *(0,5 puntos)* Halla el vector de $\operatorname{Col} A$ más cercano a $\mathbf{b}$ utilizando la matriz P calculada en el apartado anterior.

Solución: El vector de $\operatorname{Col} A$ más cercano a $\mathbf{b}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$, que podemos calcular utilizando la matriz P calculada en el apartado anterior,

$$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{b} = P\,\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) *(0,4 puntos)* Calcula la solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solución: Las ecuaciones normales $A^T A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o bien

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(e) *(0,4 puntos)* Calcula de nuevo el vector de Col A más cercano a $\mathbf{b}$ a partir de la solución de mínimos cuadrados que has calculado en el apartado anterior.

Solución: Utilizando la solución de mínimos cuadrados calculada en el apartado anterior, $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, se obtiene que

$$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Proy}_{\operatorname{Col} A} \mathbf{b}$$

coincidiendo el resultado con lo calculado en el apartado (c).

10. *(1 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}05$ por cada respuesta errónea)* Sea $U = [\mathbf{u_1}\ \mathbf{u_2}\ \mathbf{u_3}]$ una matriz ortogonal 3×3 con columnas $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{u_3}$ que verifica $U \neq U^\top$. Sean $A = [\mathbf{u_1}\ \mathbf{u_2}]$ la matriz formada por las 2 primeras columnas de U, $\mathbf{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ y

$$M = U \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^\top$$

Denotamos la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre Col A por $\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col}A}(\mathbf{x})$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean U y $\mathbf{b}$).

$\mathcal{B}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$	S
$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col}A}\mathbf{b} = AA^\top\mathbf{b}$	S
El vector de coordenadas de $\mathbf{x}$ en $\mathcal{B}$ es $[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = U\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$	N
$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col}A}(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$	S
$\operatorname{Proy}_{\operatorname{Col}A}(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_3$	N
$\mathbf{b} - \operatorname{Proy}_{\operatorname{Col}A}\mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$	S
$M(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_2$	S
Nul M = Gen $\{\mathbf{u}_3\}$	S
M es invertible	N
$UU^\top = I$	S