Cálculo II

21 de enero de 2019

Problema 1. (3 Ptos.)

a) Calcula la derivada direccional de la función $f(x,y) = xe^y - lnx - e^y$ en el punto A(1,1) y en la dirección del vector $\bar{v} = (1,-1)$.
b) Sea $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable, tal que $g(1,2,3) = (1,1)$ y cuya matriz jacobiana en el punto $P(1,2,3)$ es $Jg(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula las derivadas parciales de $f \circ g$ en $P(1,2,3)$.
c) Calcule los puntos en los que $f(x,y)$ alcanza un máximo, mínimo relativo o un punto de silla.

Solución:

Primero calculamos el gradiente de f . $\nabla f(x,y) = (e^y - \frac{1}{x}, xe^y - e^y)$.

La función f es diferenciable en A(1,1) porque sus derivadas parciales son continuas en A. Por tanto, la derivada de f en la dirección de $\bar{v}$ se puede calcular de la siguiente forma:

$$|\bar{v}| = \sqrt{2}, \ \ \bar{w} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \ \ , D_w f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \bar{w} = (e-1, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{e-1}{\sqrt{2}}$$

Para calcular $\nabla(f \circ g)(1,2,3)$ aplicamos la regla de la cadena:

$$\nabla(f \circ g)(1,2,3) = \nabla f\big(g(1,2,3)\big) \cdot Jg(1,2,3) = \nabla f(1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (e-1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (e-1, 1-e, \ 0) \, .$$

Por lo tanto: $\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(1,2,3) = e-1, \ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y}(1,2,3) = 1-e, \ \frac{\partial (f \circ g)}{\partial z}(1,2,3) = 0$

Para el cálculo de los extremos locales resolvemos: $\nabla f(x,y) = (e^y - \frac{1}{x}, xe^y - e^y)$=(0,0) y tenemos: $xe^y - e^y = 0, \ (x-1) \cdot e^y = 0 \Longrightarrow x = 1$ y sustituyendo en la primera componente

$e^y - \frac{1}{1} = 0 \ \Longrightarrow y = 0$. Luego el único punto crítico es $P(1,0)$.

A continuación calculamos la matriz hessiana de f: $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & e^y \\ e^y & (x-1)e^y \end{pmatrix}$

$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y como $det\, H_f(1,0) = -1 < 0$.

La función f tiene un punto de silla en $P(1,0)$.

Problema 2. (2 Ptos.)

a) Calcule $\iint_A \frac{lny}{(x+y)^2} dxdy$ siendo $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le y \le 2,\ y \le x \le 2y\}$

b) Calcule: $\oint_C (y^2 + arctgx)\, dx + (e^y - x^2)\, dy$ siendo C el borde del conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ orientado positivamente.

Solución:

Aplicando el teorema de Fubini tenemos: $\iint_A \frac{lny}{(x+y)^2} dxdy = \int_1^2 \int_y^{2y} \frac{lny}{(x+y)^2} dxdy =$ $\int_1^2 lny \cdot \left[\frac{-1}{x+y}\right]_y^{2y} dy = \int_1^2 lny \cdot \frac{1}{6y} dy = \frac{1}{6}\left[\frac{ln^2 y}{2}\right]_1^2 = \frac{ln^2 2}{12}$.

Para el apartado b) vamos a usar el teorema de Green porque *C* es una curva cerrada simple positivamente orientada, diferenciable a trozos, en el plano y

$P(x,y) = y^2 + arctgx$ y $Q(x,y) = e^y - x^2$ tienen derivadas parciales continuas en un abierto que contiene *D*. Por tanto:

$\oint_C (y^2 + arctgx)\, dx + (e^y - x^2) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \iint_D (-2x - 2y)\, dxdy$ y realizando un cambio a polares:

$$\int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2(rcos\theta + rsen\theta) \cdot r\, d\theta dr = \int_1^2 -2r^2 [sen\theta - cos\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_1^2 -2r^2 \cdot 2dr = \left[\frac{-4r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{-28}{3}$$

Problema 3. (2,5 Ptos) Se define el campo vectorial: $F(x,y) = \left(\frac{2x}{y^2+1}, \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}\right)$

a) Compruebe que es conservativo y calcule la función potencial. (2 Ptos.)

b) Calcule la integral de línea $\int_\gamma F \cdot ds$, γ= gráfica de $\gamma(t) = \left(t, e^t - e^{t^2}\right)\ t \in [0,1]$.

Solución:

Sean F_1 y F_2 las componentes de la función *F*. Ambas son de clase 1 en $\mathbb{R}$ (cociente de polinomios con denominador no nulo) y cumplen:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)$$

Por lo tanto *F* es un campo conservativo. Calculemos la función potencial f de F . $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y con $\nabla f = F$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{y^2+1} \Longrightarrow f(x,y) = \int \frac{2x}{y^2+1} dx = \frac{x^2}{y^2+1} + g(y);$$

Además $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) \Longrightarrow \frac{-2x^2y}{(y^2+1)^2} + g'(y) = \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}$

$g'(y) = \frac{-2y}{(y^2+1)^2} = -2y(y^2+1)^{-2} \Longrightarrow g(y) = \frac{1}{y^2+1} + c$ $\quad$ ($c \in \mathbb{R}$). Luego la función potencial buscada es: $f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1} + g(y) = \frac{x^2}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1}$;

La integral de línea pedida se puede calcular ahora como:

$$\int_\gamma F \cdot ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1,0) - f(0,0) = 2 - 1 = 1$$

Problema 4. (2,5 Ptos.)

a) Calcule todas las soluciones en $\mathbb{C}$ de $cos(z) = 3$.
b) Calcule $\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}dz$ donde γ representa la circunferencia de ecuación $|z| = 2$.

Solución:

cos(z)=3; $\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = 3$; $e^{jz} + e^{-jz} = 6$; $e^{2jz} + 1 = 6e^{jz}$; llamando a $e^{jz} = w$ tenemos

$w^2 - 6w + 1 = 0$; $w = \frac{6\pm\sqrt{36-4}}{2} = \frac{6\pm4\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$. Por tanto $e^{jz} = 3 \pm 2\sqrt{2}$;

$$jz = \ln(3 \pm 2\sqrt{2}) + 2n\pi j \Longrightarrow z = 2n\pi - j\ln(3 \pm 2\sqrt{2}) \ con\ n \in \mathbb{Z}$$

Para el apartado b utilizaremos el teorema de los residuos.

$$z^2 - 1 = 0;\ z = \pm 1 \text{ polos de orden 1 porque } \operatorname{sen}(\pm 1\ ) \neq 0$$

$$Res(f,1) = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\operatorname{sen} z}{z^2-1} = \lim_{z\to 1}\frac{\operatorname{sen} z}{z+1} = \frac{sen\ 1}{2}$$

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}\frac{(z+1)\operatorname{sen} z}{z^2-1} = \lim_{z\to -1}\frac{\operatorname{sen} z}{z-1} = \frac{sen\ (-1)}{-2} = \frac{-sen\ 1}{-2} = \frac{sen\ 1}{2}$$

$$\int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-1}dz = 2\pi j\left(\frac{sen\ 1}{2} + \frac{sen\ 1}{2}\right) = 2\pi j \cdot sen\ 1$$