Cálculo II

30 de junio de 2016

Publicación de notas: 11-7-2016. **Revisión del examen**: 14-7-2016.

Problema 1 (3.5 puntos). Se llama f a la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $(0,0)$.

(b) Determina si f es diferenciable en $(0,0)$.

(c) Utilizando la definición, determina si existen las derivadas de f en $(0,0)$ en las direcciones $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. En caso de que existan, calcula su valor.

(d) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $g(x,y) = (xy,\ x+y)$. Calcula las derivadas parciales de $f \circ g$ en $(1,0)$.

Solución. (a) La función f no es continua en $(0,0)$ porque el límite a lo largo de la recta $y = \sqrt{3}x$ es distinto de $f(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\sqrt{3}x}} \frac{x^3y - xy^3}{x^4+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}x^4 - 3\sqrt{3}x^4}{x^4+9x^4} = \frac{-2\sqrt{3}}{10} \neq f(0,0)\,.$$

(b) La función f no es diferenciable en $(0,0)$ porque no es continua en este punto.

(c) Derivada de f en $(0,0)$ en la dirección $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} D_u f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2\sqrt{2}}{8}t^3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2}t \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8}t^3}{\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^4}{4}\right)t} = 0. \end{aligned}$$

La derivada de f en $(0,0)$ en la dirección $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, si existiera, sería el siguiente límite:

$$\begin{aligned} D_v f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left((0,0) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}, \frac{t}{2}\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{3\sqrt{3}t^3}{8} \cdot \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2} \cdot \frac{t^3}{8}}{\left(\frac{9t^4}{16} + \frac{t^4}{16}\right)t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sqrt{3}}{10t}. \end{aligned}$$

Este último límite no existe y, por tanto, tampoco existe la derivada en $(0,0)$ en la dirección v.

(d) La matriz jacobiana de $g(x,y) = (xy, x+y)$ es

$$Jg(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como g tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$, se deduce que g es diferenciable en todo punto. Además, $g(1,0) = (0,1)$. A continuación se calculan las derivadas parciales de f en un punto $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^4 + y^4) - 4x^3(x^3y - xy^3)}{(x^4 + y^4)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^4 + y^4) - 4y^3(x^3y - xy^3)}{(x^4 + y^4)^2}.$$

Las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, por lo que f es diferenciable en $(0,1)$. Se puede aplicar entonces la regla de la cadena:

$$\nabla(f \circ g)(1,0) = \nabla f(0,1) \cdot Jg(1,0) = (-1,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (0,-1).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(1,0) = 0, \qquad \frac{\partial (f \circ g)}{\partial y}(1,0) = -1.$$

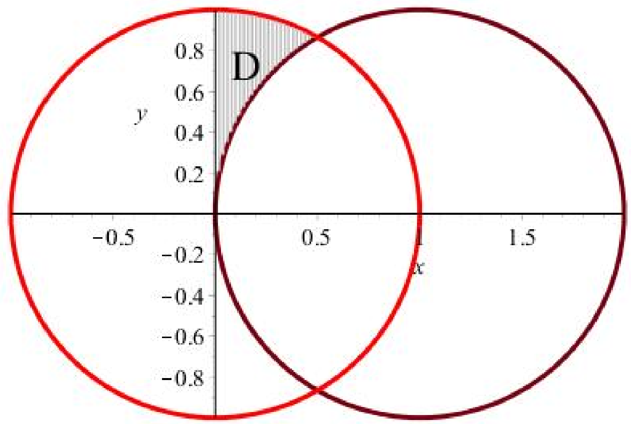
Problema 2 (2 puntos). Se define el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$D = \left\{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 2x\right\}.$$

Calcula la siguiente integral:

$$\iint_D y\ dxdy.$$

Solución. El conjunto D se encuentra en el primer cuadrante del plano y está limitado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, que tiene centro $(0, 0)$ y radio 1, y la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$, que tiene centro $(1, 0)$ y radio 1:



En primer lugar se determina el punto de corte de las dos circunferencias:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 2x \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_D y\ dxdy &= \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\ dy\ dx = \int_0^{1/2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1-x^2}{2} - \frac{2x-x^2}{2}\ dx = \int_0^{1/2} \frac{1-2x}{2}\ dx \\ &= \left[\frac{x-x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

La integral también se puede calcular utilizando coordenadas polares, que llamaremos r y α. En el primer cuadrante del plano, las circunferencias se cortan en el punto $\left(1/2, \sqrt{3}/2\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$. Por tanto, α varía entre $\pi/3$ y $\pi/2$. Si $\alpha \in (\pi/3, \pi/2)$ y un punto $(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$, entonces

$$r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = 2r\cos\alpha,$$

$$r = 2\cos\alpha.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_D y\, dxdy &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{2\cos\alpha}^{1} r^2\operatorname{sen}\alpha\; drd\alpha = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\alpha\right]_{r=2\cos\alpha}^{r=1} d\alpha \\
&= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{3}\operatorname{sen}\alpha - \frac{8}{3}\cos^3\alpha\operatorname{sen}\alpha\; d\alpha \\
&= \left[\frac{-1}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos^4\alpha\right]_{\alpha=\pi/3}^{\alpha=\pi/2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Problema 3 (1.5 puntos). Se define el siguiente campo vectorial en $\mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = \left(x^2 y,\ xy^2\right).$$

(a) ¿Es F un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$? Justifica la respuesta.

(b) Calcula la integral de línea de F a lo largo de la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, orientada en sentido positivo.

(c) Calcula la integral de línea de F a lo largo del arco de la parábola $y^2 = x$ desde el punto $(1, -1)$ hasta el punto $(1, 1)$.

Solución. (a) Se observa que

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = x^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = y^2, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(1, 0) \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}(1, 0).$$

Por tanto, F no es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$.

(b) Una parametrización de la circunferencia unidad es $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t \operatorname{sen} t, \cos t \operatorname{sen}^2 t\right) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\ dt = 0. \end{aligned}$$

(c) Una parametrización del arco de parábola es $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$. Entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{-1}^{1} \left(t^5, t^4\right) \cdot (2t, 1)\, dt = \int_{-1}^{1} 2t^6 + t^4\ dt = \left.\frac{2}{7}t^7 + \frac{1}{5}t^5\right|_{-1}^{1} = \frac{34}{35}.$$

Problema 4 (3 puntos).

1. Se define la siguiente función en $\mathbb{R}^2$:

$$u(x, y) = x^3 + axy^2,$$

donde a representa una constante real. Calcula el valor de a y determina otra función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ para que la función de variable compleja $F(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ sea analítica (es decir, holomorfa) en todo $\mathbb{C}$.

2. Se considera la siguiente función de variable compleja:

$$f(z) = \frac{e^z}{(e^z + 1)(e^z + 2)}.$$

(a) Determina todos los polos de f y el orden de cada uno de ellos.

(b) Para cada $0 < R < \ln 2$, se llama γ_R a la frontera del rectángulo en el plano complejo cuyos vértices son los puntos $z = -R$, $z = R$, $z = R + 2\pi j$, $z = -R + 2\pi j$. Se supone que γ_R está orientada en sentido positivo. Calcula la integral

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz.$$

Solución. 1. Para que F sea analítica en $\mathbb{C}$, las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto del plano:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + ay^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2axy.$$

Entonces

$$v(x, y) = \int 3x^2 + ay^2 dy = 3x^2 y + \frac{a}{3} y^3 + \varphi(x),$$

donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable. Además,

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2axy.$$

Entonces

$$\varphi'(x) = (-6 - 2a)\, xy.$$

Como φ' no depende de la variable y, la expresión $(-6 - 2a)\, xy$ tampoco puede depender de y. Se deduce entonces que $-6 - 2a = 0$, $a = -3$ y $\varphi'(x) = 0$ para todo x, luego φ es constante. Por tanto, si $k \in \mathbb{R}$, las funciones

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \qquad v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + k$$

tienen derivadas parciales continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto, luego $F(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$.

2. Las singularidades de f son los ceros de la función $g(z) = (e^z + 1)(e^z + 2)$:

$$(e^z + 1)(e^z + 2) = 0 \Leftrightarrow e^z = -1 \text{ ó } e^z = -2.$$

Las soluciones de la ecuación $e^z = -1$ son los logaritmos de -1:

$$z = \ln|-1| + j(\pi + 2\pi n) = (2n+1)\pi j \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Las soluciones de la ecuación $e^z = -2$ son los logaritmos de -2:

$$z = \ln|-2| + j(\pi + 2\pi n) = \ln 2 + (2n+1)\pi j \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Por tanto, f tiene una singularidad en $z = (2n+1)\pi j$ y en $z = \ln 2 + (2n+1)\pi j$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Además,

$$g'(z) = e^z(e^z + 2) + (e^z + 1)e^z,$$

$$g'((2n+1)\pi j) \neq 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

$$g'(\ln 2 + (2n+1)\pi j) \neq 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Esto demuestra que todos los ceros de g son simples. Como $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, se deduce que todas las singularidades de f son polos simples.

Como $0 < R < \ln 2$, la única singularidad en el interior de γ_R es $z = \pi j$. El residuo de f en $z = \pi j$ es

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi j} f(z) = \lim_{z \to \pi j} \frac{(z - \pi j)e^z}{(e^z+1)(e^z+2)} = 1.$$

La integral a lo largo de γ_R se calcula aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi j \cdot \operatorname*{Res}_{z=\pi j} f(z) = 2\pi j.$$