Asignatura: Cálculo II. **Fecha**: 1-6-2015.

Publicación de notas: 8-6-2015. **Revisión del examen**: 11-6-2015.

Duración: 2 horas y 30 minutos.

Todos los problemas tienen la misma puntuación.

Problema 1 Se define la siguiente función en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy.$$

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra función con la propiedad de que $g'(t) = e^{t^2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

a) Calcule la derivada de la función f en el punto $(3,1)$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Calcule las derivadas parciales de $g \circ f$ en el punto $(3,1)$.

c) Determine los máximos relativos (o locales), los mínimos relativos y los puntos de silla de f.

Solución.

a) En primer lugar se calculan las derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9x.$$

Como las derivadas parciales son continuas, la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, la derivada en la dirección de v se puede calcular del siguiente modo:

$$D_v f(3,1) = \nabla f(3,1) \cdot v = (18, -24) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 9\sqrt{3} - 12.$$

b) A continuación se aplica la regla de la cadena para calcular el gradiente de $g \circ f$ en el punto $(3,1)$:

$$\nabla (g \circ f)(3,1) = g'(f(3,1)) \cdot \nabla f(3,1) = g'(1) \cdot (18, -24) = e\,(18, -24).$$

Por tanto,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(3,1) = 18e, \qquad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial y}(3,1) = -24e.$$

c) Para determinar los extremos locales de f hay que calcular primero los puntos críticos de la función:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 9y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3y \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow 3x = y^2. \end{cases}$$

La primera ecuación implica que $y = x^2/3$. Se introduce esta relación en la segunda ecuación:

$$3x = y^2 = \frac{x^4}{9}, \qquad x^4 = 27x, \qquad x\left(x^3 - 27\right) = 0.$$

Por tanto, $x = 0$ ó $x = 3$, es decir, los puntos críticos de f son $(0, 0)$ y $(3, 3)$. A continuación se calcula la matriz hessiana de f:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}, \qquad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(3, 3) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(H_f(0, 0)) < 0$, la función f tiene un punto de silla en $(0, 0)$. Como $\det(H_f(3, 3)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, 3) = 18 > 0$, la función f tiene un mínimo local en $(3, 3)$.

Problema 2 Se define la siguiente función:

$$F(x, y) = (\cos(x - 2y), -2\cos(x - 2y)).$$

a) Demuestre que F es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule una función potencial.

c) Sea C el segmento con origen en el punto $(\pi/2, \pi/2)$ y final en $(-\pi/2, \pi/2)$. Calcule $\int_C F \cdot ds$.

Solución.

a) Escribimos $F(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$, con $M(x, y) = \cos(x - 2y)$ y $N(x, y) = -2\cos(x - 2y)$. Las componentes de F son continuas y tienen derivadas continuas por ser producto, resta y composición de funciones continuas con derivadas continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Para que sea F conservativo se debe cumplir la igualdad $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ en todo $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) &= -\text{sen}(x - 2y) \cdot (-2) = 2\text{sen}(x - 2y), \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) &= -2(-\text{sen}(x - 2y)) = 2\text{sen}(x - 2y). \end{aligned}$$

Por tanto, F es conservativo en $\mathbb{R}^2$.

b) Si f es una función potencial de F, entonces

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)) = (M(x, y), N(x, y)).$$

Como $f_x(x, y) = \cos(x - 2y)$, se cumple que

$$f(x, y) = \int \cos(x - 2y)\, dx = \text{sen}(x - 2y) + h(y),$$

siendo h una función que depende sólo de y. Si se deriva esta última expresión de $f(x, y)$ respecto a y y se igual a N, se obtiene que

$$\cos(x - 2y) \cdot (-2) + h'(y) = -2\cos(x - 2y).$$

Entonces $h'(y) = 0$, es decir, h es constante. Así, para todo $c \in \mathbb{R}$, $f(x, y) = \text{sen}(x - 2y) + c$ es una función potencial de F.

c) Puesto que el campo F es conservativo, las integrales de F a lo largo de curvas en $\mathbb{R}^2$ sólo dependen de los extremos. Por tanto,

$$\int_C F \cdot ds = f(-\pi/2,\ \pi/2) - f(\pi/2,\ \pi/2) = \text{sen}(-3\pi/2) - \text{sen}(-\pi/2) = 1 - (-1) = 2.$$

Problema 3

a) Determine si existe algún número complejo z tal que tg $z = j$.

b) Calcule todos los números complejos z tales que tg $z = 1$.

c) Sea γ la circunferencia en $\mathbb{C}$ de ecuación $\left|z - \frac{\pi}{4}\right| = 1$, recorrida en sentido positivo. Calcule las dos integrales siguientes:

$$\text{i)} \int_\gamma \frac{dz}{\text{tg } z - j}, \qquad \text{ii)} \int_\gamma \frac{dz}{\text{tg } z - 1}.$$

Solución.

a) Sea $z = x + jy$. Siguiendo la definición de sen$z$ y $\cos z$ se tiene que

$$\text{tg } z = j \Leftrightarrow \text{sen } z = j\cos z \Leftrightarrow \frac{e^{zj} - e^{-zj}}{2j} = j\frac{e^{zj} + e^{zj}}{2} \Leftrightarrow e^{zj} - e^{-zj} = -e^{zj} - e^{-zj}$$

$$\Leftrightarrow e^{zj} = 0 \Leftrightarrow e^{-y+xj} = 0 \Leftrightarrow e^{-y} = 0.$$

Como $e^{-y} \neq 0$ en todo $y \in \mathbb{R}$, $e^{zj} \neq 0$ en todo $z \in \mathbb{C}$ y, en consecuencia, tg $z = j$ no tiene ninguna solución.

b) Análogamente,

$$\text{tg } z = 1 \Leftrightarrow \text{sen } z = \cos z \Leftrightarrow \frac{e^{zj} - e^{-zj}}{2j} = \frac{e^{zj} + e^{-zj}}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{2zj} - 1}{2je^{zj}} = \frac{e^{2zj} + 1}{2e^{zj}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2zj} - 1 = j\left(e^{2zj} + 1\right) \Leftrightarrow (1-j)e^{2zj} = 1 + j \Leftrightarrow e^{2zj} = \frac{1+j}{1-j} \Leftrightarrow e^{2zj} = j.$$

Por lo tanto tg $z = 1$ si y sólo si $2zj$ es un logaritmo de j. Además, como $|j| = 1$ y $\arg j = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, obtenemos

$$\text{tg } z = 1 \Leftrightarrow 2zj = \log j \Leftrightarrow 2zj = j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

c) Teniendo en cuenta que $\frac{1}{\text{tg } z - j} = \frac{\cos z}{\text{sen } z - j\cos z}$, la función $\frac{1}{\text{tg } z - j}$ es analítica siempre que sen $z - j\cos z \neq 0$. Como ya hemos visto en a), esta última función no se anula nunca por lo que $\frac{1}{\text{tg } z - j}$ es analítica en todo el plano. Como consecuencia,

$$i) \int_\gamma \frac{dz}{\text{tg } z - j} = 0.$$

Para calcular la integral *ii)* es suficiente tener en cuenta los cálculos de b). Como el denominador de $\frac{1}{\text{tg } z - j}$ se anula en los puntos $z_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, esta función es analítica en todo el plano excepto en los puntos z_k, que son polos simples porque

$$(\text{sen } z - \cos z)' = \cos z + \text{sen } z, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \neq 0.$$

Entonces, como $z = \frac{\pi}{4}$ es el único polo que está en el interior de γ,

$$ii) \int_\gamma \frac{dz}{\text{tg } z - 1} = 2\pi\, j Res_{z=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\text{tg } z - 1} = 2\pi\, j \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{\text{tg } z - 1} = 2\pi\, j \lim_{z \to \frac{\pi}{4}} \cos^2(z) = \pi\, j,$$

después de aplicar la regla de L'Hopital.