Cálculo II

31 de mayo de 2017

Problema 1 *(3'5 puntos). Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como*

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, x - y\right).$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ otra función tal que $g(0,0) = 3$ y $\nabla g(u,v) = \left(e^{(u-v)^2}, e^{-(u-v)^2}\right)$ para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Sea $h = g \circ f$.

(a) Determina los extremos locales (o relativos) y los puntos de silla de la función f_1.

(b) Demuestra que la ecuación $f_1(x,y) = 0$ define la variable y como función implícita de x en un entorno del punto $(0,0)$. Sea $y = \varphi(x)$ esta función. Calcula $\varphi'(0)$.

(c) ¿Es g una función continua? ¿Es h una función diferenciable? Justifica las respuestas.

(d) Halla la matriz jacobiana de h en el punto $(0,0)$ y la ecuación del plano tangente a la gráfica de h en el punto $(0,0)$.

Solución. (a) Determinamos los puntos críticos de f_1 igualando a cero sus derivadas parciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + (2/x)^2 = 5 \\ y = 2/x \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ y = 2/x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = 4 \text{ ó } x^2 = 1 \\ y = 2/x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm 2 \text{ ó } x = \pm 1 \\ y = 2/x. \end{array} \right.$$

Por tanto, los puntos críticos son $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$ y $(-1,-2)$. Para determinar qué tipo de punto crítico es cada uno se utiliza el hessiano de la función:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36\left(x^2 - y^2\right).$$

Como $H(2,1) > 0$ y $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(2,1) > 0$, la función f_1 tiene un mínimo en $(2,1)$. Como $H(-2,-1) > 0$ y $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(-2,-1) < 0$, f_1 tiene un máximo en $(-2,-1)$. Como $H(1,2) < 0$ y $H(-1,-2) < 0$, f_1 tiene puntos de silla en $(1,2)$ y en $(-1,-2)$.

(b) La función f_1 tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$ por ser un polinomio. Como $f_1(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = -12 \neq 0$, existe un intervalo $(0-\delta, 0+\delta)$ (para algún $\delta > 0$) y existe una función (implícita) $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ con derivada continua tal que $\varphi(0) = 0$ y $f_1(x, \varphi(x)) = 0$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$. Por tanto, para todo $x \in (-\delta, \delta)$ se cumple que

$$0 = \frac{d}{dx}\left[f_1(x, \varphi(x))\right] = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, \varphi(x)) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Entonces

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

En $x = 0$ se obtiene

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, \varphi(0))}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(0, \varphi(0))} = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)} = -\frac{-15}{-12} = \frac{-5}{4}.$$

(c) La igualdad $\nabla g(u,v) = \left(e^{(u-v)^2}, e^{-(u-v)^2}\right)$ significa que $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = e^{(u-v)^2}$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = e^{-(u-v)^2}$. Se observa así que la función g tiene derivadas parciales continuas en todo punto del plano. En consecuencia, g es una función diferenciable y, por tanto, continua en todo $\mathbb{R}^2$. Por otra parte, f también es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ porque sus funciones componentes f_1 y f_2 son diferenciables, ya que sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 6xy - 12, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1,$$

son continuas en todo punto. Entonces $h = g \circ f$ es la composición de dos funciones diferenciables, por lo que es una función diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(d) Para hallar la matriz jacobiana de h en el punto $(0,0)$ se utilizará la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} J_h(0,0) &= J_g(f(0,0)) \cdot J_f(0,0) = J_g(0,0) \cdot J_f(0,0) = \nabla g(0,0) \cdot J_f(0,0) \\ &= (1,1)\begin{pmatrix} -15 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (-14, -13). \end{aligned}$$

La ecuación del plano en $(0,0)$ es

$$z = h(0,0) + \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0)\,y.$$

Se indica en el enunciado que $g(0,0) = 3$, luego $h(0,0) = g(f(0,0)) = g(0,0) = 3$. Además, $J_h(0,0) = (-14,-13)$, por lo que $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = -14$ y $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = -13$. Por tanto, la ecuación del plano tangente es

$$z = 3 - 14x - 13y.$$

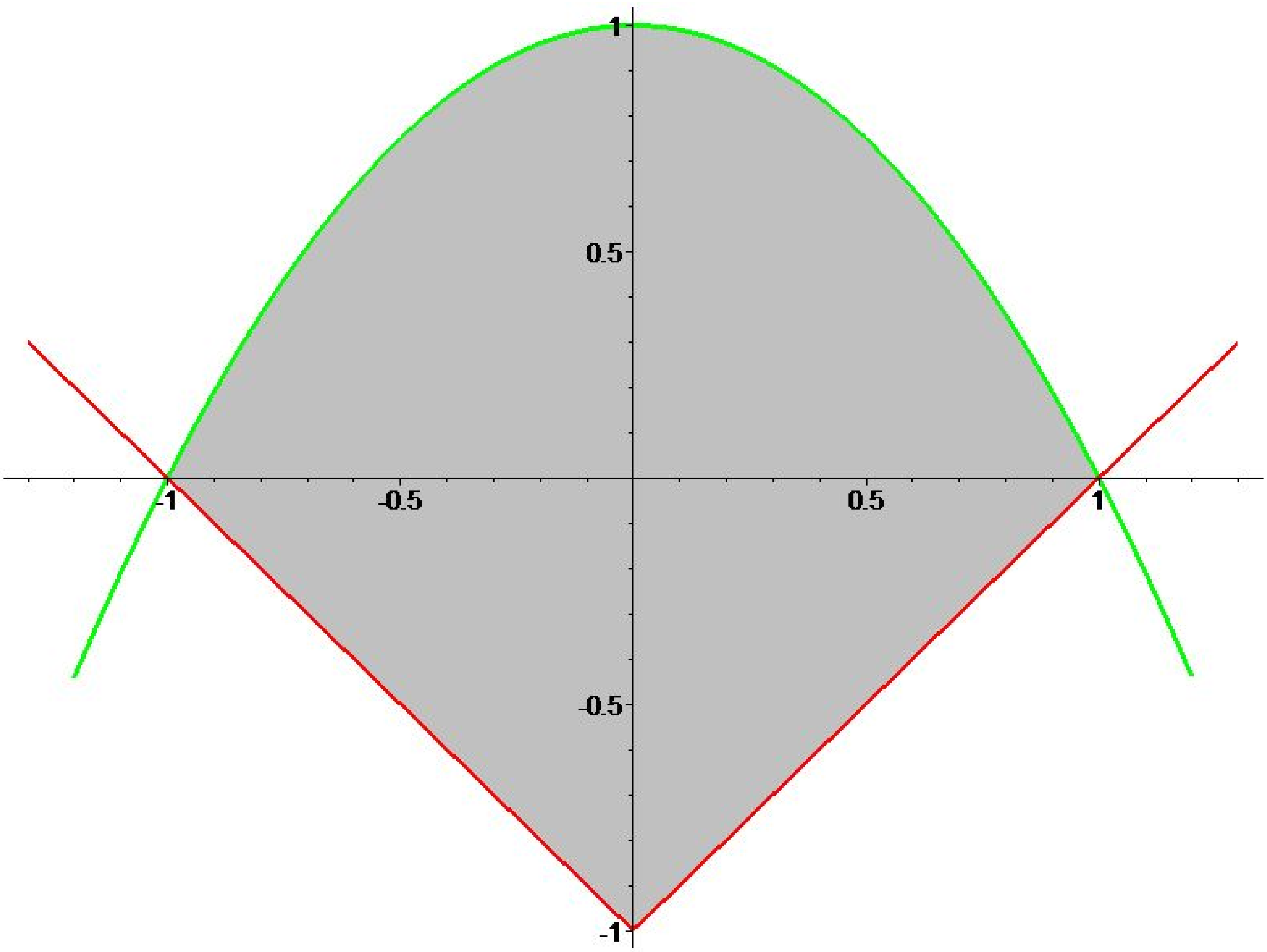
Problema 2 *(3 puntos).*

(a) Representa gráficamente el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \le x \le 1,\ |x| - 1 \le y \le 1 - x^2\}$.

(b) Expresa la integral $\iint_A x^2 dxdy$ *en los dos órdenes de integración en coordenadas cartesianas y calcúlala.*

(c) Calcula la integral de línea de $F(x, y) = (2xy^3 - y^2 \cos x,\ 1 + 3x^2y^2 - 2y \operatorname{sen} x)$ *a lo largo la curva* γ *de ecuación* $x = \frac{\pi}{2}y^2$ *desde el punto* $(0, 0)$ *hasta el punto* $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Solución. (a) En el siguiente gráfico se representa la curva $y = |x| - 1$ en rojo, la curva $y = 1 - x^2$ en verde y el conjunto A en gris:



(b) Por el teorema de Fubini se cumple que

$$\begin{aligned}\iint_A x^2 dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{1-x^2} x^2 dydx + \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{1-x^2} x^2 dydx \\ &= \int_{-1}^{0}\int_{-y-1}^{y+1} x^2 dxdy + \int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} x^2 dxdy.\end{aligned}$$

El conjunto A es simétrico respecto al eje OY y, además, la función $f(x, y) = x^2$ tiene la propiedad de que $f(x,y) = f(-x,y)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_A x^2 dxdy &= 2\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x^2} x^2 dydx = 2\int_0^1 x^2 y\Big|_{y=x-1}^{y=1-x^2} dx \\
&= 2\int_0^1 \left(x^2 - x^4 - x^3 + x^2\right) dx = \int_0^1 \left(-2x^4 - 2x^3 + 4x^2\right) dx \\
&= \frac{-2x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{13}{30}.
\end{aligned}$$

(c) La función F tiene derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Además,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 - 2y\cos x = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y).$$

Por tanto, F es un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$, es decir, existe una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y)$, se deduce que

$$f(x,y) = \int F_2(x,y)\, dy = \int \left(1 + 3x^2y^2 - 2y \operatorname{sen} x\right) dy = y + x^2y^3 - y^2 \operatorname{sen} x + g(x),$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que sólo depende de x. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - y^2\cos x + g'(x) = F_1(x,y) = 2xy^3 - y^2 \cos x.$$

Se deduce entonces que $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, g es una constante arbitraria. Por tanto, para cada $c \in \mathbb{R}$, la función

$$f(x,y) = y + x^2y^3 - y^2 \operatorname{sen} x + c$$

es un potencial de F. La integral de línea se obtiene evaluando f en los extremos de la curva γ:

$$\int_\gamma F \cdot ds = f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) - f(0,0) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Problema 3 *(3'5 puntos).*

1. *Calcula todas las soluciones complejas de la ecuación* $\cos(z) + 2 = 0$.

2. *Para cada* $R > 0$, *se llama* Γ_R *al contorno cerrado y orientado positivamente definido como* $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, *donde* $[-R, R]$ *es el intervalo cerrado de extremos* $-R$ *y* R *y* C_R *es la semicircunferencia superior de centro el origen y radio* R. *Sea* f *la función*

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2 (z^2+9)}.$$

   (a) *Halla todos los polos de* f *y el orden de cada uno de ellos.*

   (b) *Calcula la integral* $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$ *cuando* $R > 3$.

Solución. 1. Ecuación $\cos(z) + 2 = 0$:

$$\cos(z) + 2 = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow e^{jz} + e^{-jz} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{jz}\right)^2 + 4e^{jz} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{jz} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Si $e^{jz} = -2 - \sqrt{3}$, entonces

$$jz = \ln\left|-2-\sqrt{3}\right| + j(\pi + 2\pi n) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + (2n+1)\pi j \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Por tanto,

$$z = (2n+1)\pi - j\ln\left(2+\sqrt{3}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Si $e^{jz} = -2 + \sqrt{3}$, entonces

$$jz = \ln\left|-2+\sqrt{3}\right| + j(\pi + 2\pi n) = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + (2n+1)\pi j \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Por tanto,

$$z = (2n+1)\pi - j\ln\left(2-\sqrt{3}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

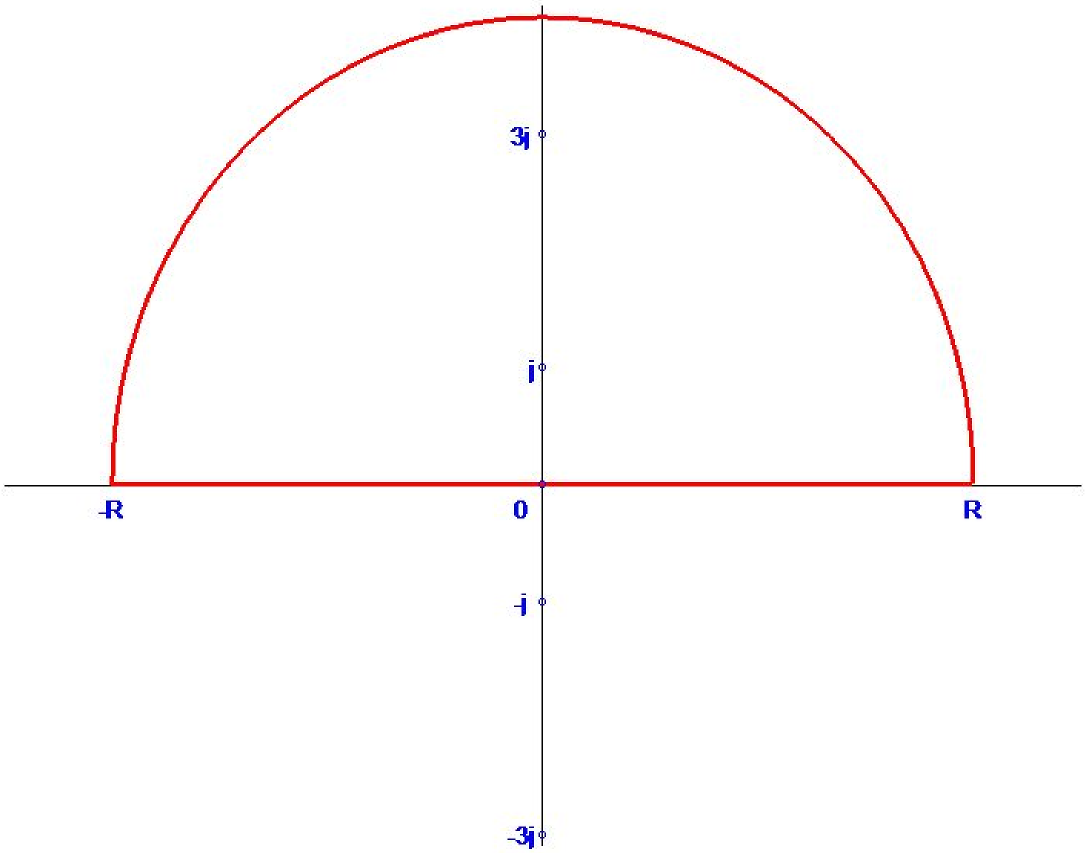
El conjunto de todas las soluciones de la ecuación es $\left\{(2n+1)\pi - j\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \ / \ n \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. (a) La función f es el cociente de dos funciones analíticas (es decir, holomorfas) en todo $\mathbb{C}$. Además, $e^{jz} \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, las únicas singularidades de f son los ceros de $g(z) = (z^2+1)^2 (z^2+9)$:

$$g(z) = (z+j)^2 (z-j)^2 (z+3j)(z-3j) = 0 \Leftrightarrow z = \pm j \text{ ó } z = \pm 3j.$$

Los puntos $z = j$ y $z = -j$ son ceros dobles de g y, por tanto, polos dobles de f. Los puntos $z = 3j$ y $z = -3j$ son ceros simples de g y, por ello, polos simples de f.

(b) Si $R > 3$, entonces los puntos $z = j$ y $z = 3j$ se encuentran en el interior de Γ_R, mientras que $z = -j$ y $z = -3j$ se encuentran en el exterior de Γ_R:



Por el teorema de los residuos se cumple que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi j\left(Res\left(f(z), j\right) + Res\left(f(z), 3j\right)\right).$$

A continuación se calcula el residuo de f en $z = j$. Teniendo en cuenta que se trata de un polo doble, se obtiene que

$$\begin{aligned}
Res\left(f(z), j\right) &= \lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[(z-j)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[(z-j)^2\frac{e^{jz}}{(z+j)^2(z-j)^2(z^2+9)}\right] \\
&= \lim_{z\to j}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{jz}}{(z+j)^2(z^2+9)}\right] \\
&= \lim_{z\to j}\frac{je^{jz}(z+j)^2(z^2+9) - e^{jz}\cdot 2(z+j)(z^2+9) - e^{jz}\cdot (z+j)^2\cdot 2z}{(z+j)^4(z^2+9)^2} \\
&= \frac{je^{-1}\cdot(-4)\cdot 8 - e^{-1}\cdot 2\cdot 2j\cdot 8 - e^{-1}\cdot(-4)\cdot 2j}{16\cdot 64} = \frac{-7}{128e}j.
\end{aligned}$$

Ahora se calcula el residuo en $z = 3j$, que es un polo simple:

$$\begin{aligned}
Res\left(f(z), 3j\right) &= \lim_{z\to 3j}(z-3j)f(z) = \lim_{z\to 3j}(z-3j)\frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2(z+3j)(z-3j)} \\
&= \lim_{z\to 3j}\frac{e^{jz}}{(z^2+1)^2(z+3j)} = \frac{e^{-3}}{64\cdot 6j} = \frac{-1}{384e^3}j.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi j\left(-\frac{7}{128e}j - \frac{1}{384e^3}j\right) = \frac{7\pi}{64e} + \frac{\pi}{192e^3} = \frac{21e^2+1}{192e^3}\pi.$$