Cálculo II

Apellidos: **Nombre**:
Fecha: 30-5-2018. **Duración**: 3 horas.
Publicación de notas: 8-6-2018. **Revisión**: 13-6-2018.
Las respuestas deben estar correctamente redactadas y justificadas.

Ejercicio 1. (3.5 puntos).

a) Se considera la función $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

i) Estudia la continuidad de F en $(0,0)$ y calcula, si existen, sus derivadas parciales en $(0,0)$.
ii) Para cada $\theta \in [0,2\pi]$, halla la derivada direccional de F en $(0,0)$ en la dirección $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.
iii) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, determina si F es diferenciable en $(0,0)$.
iv) Determina si F diferenciable en el punto $(1,2)$.

b) Sea $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable en todo punto y cuya matriz jacobiana en $(2,0)$ es $Jg(2,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $(1,1)$.

c) Determina los máximos y mínimos relativos y los puntos de silla de $h(x,y) = x^2 + y^3 - xy$.

Solución.
a)(i) Estudiamos la existencia del límite de F en $(0,0)$ utilizando coordenadas polares:

$$\lim_{r\to 0} F(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\alpha + r^3\operatorname{sen}^3\alpha}{r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha} = \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha\right).$$

Como el término $\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha$ está acotado y $\lim\limits_{r\to 0} r = 0$, se deduce que

$$\lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\alpha + \operatorname{sen}^3\alpha\right) = 0.$$

Por tanto, existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = F(0,0)$, es decir, F es continua en $(0,0)$.
La derivada parcial de F respecto a x en el punto $(0,0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(t,0)-F(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1.$$

La derivada parcial de F respecto a y en el punto $(0,0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{F(0,t)-F(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1.$$

(ii) Para cada $\theta \in [0,2\pi]$, la derivada de F en $(0,0)$ en la dirección $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ es

$$\begin{aligned} D_vF(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{F((0,0)+tv) - F(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cos^3\theta + t^3\operatorname{sen}^3\theta}{t^2\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta}}{t} = \cos^3\theta + \operatorname{sen}^3\theta. \end{aligned}$$

(iii) Si la función F fuera diferenciable en $(0,0)$, para todo vector $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ se cumpliría que

$$D_vF(0,0) = \nabla F(0,0) \cdot v = (1,1) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta.$$

Sin embargo, si $\theta = \pi/6$, entonces

$$D_v F(0,0) = \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

mientras que

$$\nabla F(0,0) \cdot v = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.$$

Como $D_v F(0,0) \neq \nabla F(0,0) \cdot v$, se deduce que F no es diferenciable en $(0,0)$.

(iv) La función F sí es diferenciable en $(1,2)$ porque sus derivadas parciales son continuas en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ porque sus componentes $f_1(x,y) = x^2+y^2$ y $f_2(x,y) = x^2 - y^2$ tienen derivadas parciales continuas en todo punto. Su matriz jacobiana en un punto (x,y) es

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

Además, g es diferenciable en todo punto por hipótesis. Por la regla de la cadena sabemos que

$$\begin{aligned} J(g \circ f)(1,1) &= Jg(f(1,1)) \cdot Jf(1,1) = Jg(2,0) \cdot Jf(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c) Para determinar los extremos locales de $h(x,y) = x^2 + y^3 - xy$ calculamos en primer lugar los puntos críticos de la función:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x - y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3y^2 - x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 2x \\ \\ 3(2x)^2 - x = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 2x \\ \\ x(12x-1) = 0 \end{array} \right\}$$

Por tanto, los puntos críticos son $(0,0)$ y $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$. La matriz hessiana de h en un punto (x,y) es

$$H_h(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}.$$

Evaluamos la matriz hessiana en los puntos críticos:

$$H_h(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_h\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de $H_h(0,0)$ es negativo, se deduce que h tiene un punto de silla en $(0,0)$. Como el determinante de $H_h(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$ es positivo y $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}) = 2 > 0$, se obtiene que h tiene un mínimo relativo en $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6})$.

Apellidos: **Nombre**:

Ejercicio 2. (3 puntos).

a) Sea $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1,\ y \leq 1-x^2,\ x \geq \dfrac{1}{2}\right\}$.

i) Dibuja el conjunto A.

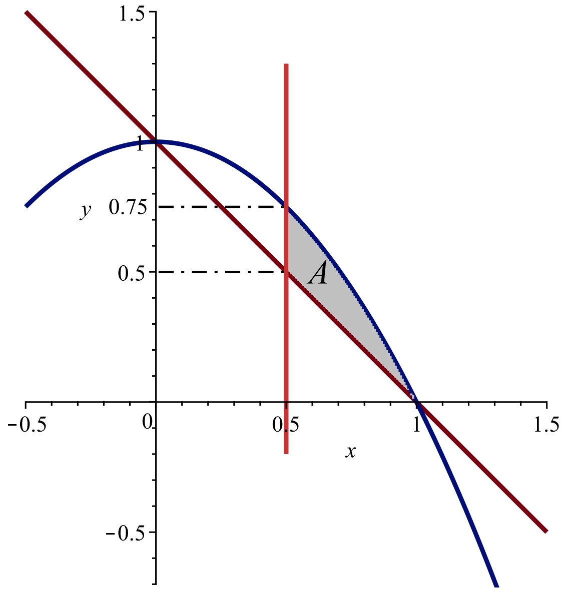
ii) Expresa la integral doble $\displaystyle\iint_A (2x-1)e^{x^2+y}\,dxdy$ en los dos órdenes de integración.

iii) Calcula la integral $\displaystyle\iint_A (2x-1)e^{x^2+y}\,dxdy$.

b) Sea γ la curva formada por la unión del segmento desde $(-1,1)$ hasta $(0,0)$ y el arco de la parábola $y=x^2$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$. Calcula la integral de línea $\displaystyle\int_\gamma (x^2+2y)dx + (y^2-2x)dy$.

Solución.

a)(i) La recta $x+y=1$ y la parábola $y=1-x^2$ se cortan en los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$. La recta $x+y=1$ y la recta $x=1/2$ se cortan en el punto $(1/2,1/2)$. Por último, la recta $x=1/2$ y la parábola se cortan en el punto $(1/2,3/4)$. El siguiente gráfico representa la recta $x+y=1$ en color morado, la parábola $y=1-x^2$ en azul, la recta $x=1/2$ en rojo y el conjunto A en gris:



(ii) Por los puntos de corte de las curvas que delimitan A, se tiene que

$$\iint_A (2x-1)e^{x^2+y}dxdy = \int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-x}^{1-x^2}(2x-1)e^{x^2+y}dy\right)dx =$$

$$= \int_0^{1/2}\left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}}(2x-1)e^{x^2+y}dx\right)dy + \int_{1/2}^{3/4}\left(\int_{1/2}^{\sqrt{1-y}}(2x-1)e^{x^2+y}dx\right)dy.$$

(iii) A continuación calculamos el valor de la integral:

$$\begin{aligned}\iint_A (2x-1)e^{x^2+y}dxdy &= \int_{1/2}^{1}\left(\int_{1-x}^{1-x^2}(2x-1)e^{x^2+y}dy\right)dx = \int_{1/2}^{1}\Big[(2x-1)e^{x^2+y}\Big]_{y=1-x}^{y=1-x^2}dx \\ &= \int_{1/2}^{1}\Big((2x-1)e-(2x-1)e^{x^2+1-x}\Big)dx \\ &= \Big[(x^2-x)e - e^{x^2+1-x}\Big]_{x=1/2}^{x=1} = e^{3/4}-\frac{3e}{4}.\end{aligned}$$

b) Una parametrización del segmento es

$$\alpha(t) = (-1+t, 1-t) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Una parametrización del arco de la parábola es

$$\beta(t) = (t, t^2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (x^2+2y)dx + (y^2-2x)dy &= \int_\alpha (x^2+2y)dx + (y^2-2x)dy + \int_\beta (x^2+2y)dx + (y^2-2x)dy \\
&= \int_0^1 \big(((-1+t)^2 + 2(1-t)) \cdot 1 + ((1-t)^2 - 2(-1+t)) \cdot (-1)\big)\, dt \\
&\quad + \int_0^1 \big((t^2+2t^2) \cdot 1 + (t^4 - 2t) \cdot 2t\big)\, dt \\
&= \int_0^1 0\, dt + \int_0^1 (2t^5 - t^2) dt = \frac{t^6}{3} - \frac{t^3}{3}\bigg|_{t=0}^{t=1} = 0.
\end{aligned}$$

Apellidos: **Nombre**:

Ejercicio 3. (3.5 puntos).

a) Calcula todos los números complejos z tales que $(1+j)z^3+j-1=0$.

b) Sea $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z^2+9)^2}$.

i) Halla los ceros y los polos de f e indica su orden.

ii) Calcula la integral de f a lo largo de la circunferencia C de ecuación $|z-j|=3$.

c) Utiliza el cambio de variable $z=e^{jt}$ para calcular la integral real $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2}{2+\operatorname{sen} t}dt$.

Solución.

a) Solución de la ecuación:

$$(1+j)z^3+j-1=0 \Leftrightarrow z^3=\frac{1-j}{1+j}=\frac{(1-j)^2}{(1+j)(1-j)}=\frac{1-2j-1}{2}=-j.$$

Por tanto, las soluciones son las raíces cúbicas de $-j$:

$$z=e^{j\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}}=\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+j\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{-\pi}{2}+2\pi k}{3}\right) \qquad (k=0,1,2).$$

Es decir, las tres soluciones son

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{j\frac{-\pi}{6}}=\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+j\operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j,\\ z_1 &= e^{j\frac{3\pi}{6}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+j\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=j,\\ z_2 &= e^{j\frac{7\pi}{6}}=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+j\operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}j.\end{aligned}$$

b) La función f tiene un cero simple en $z=0$. Además, como $(z^2+9)^2=(z-3j)^2(z+3j)^2$, se deduce que f tiene dos polos dobles en $z=3j$ y $z=-3j$. La única singularidad de f en el interior de C es el punto $z=3j$. Al ser un polo doble, el residuo en $z=3j$ es

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=3j}f(z) &= \lim_{z\to 3j}\frac{d}{dz}\left[(z-3j)^2f(z)\right]=\lim_{z\to 3j}\frac{d}{dz}\left[(z-3j)^2\frac{ze^z}{(z-3j)^2(z+3j)^2}\right]\\ &= \lim_{z\to 3j}\frac{d}{dz}\left[\frac{ze^z}{(z+3j)^2}\right]=\lim_{z\to 3j}\frac{(e^z+ze^z)(z+3j)^2-2ze^z(z+3j)}{(z+3j)^4}\\ &= \lim_{z\to 3j}\frac{(e^z+ze^z)(z+3j)-2ze^z}{(z+3j)^3}\\ &= \frac{(e^{3j}+3je^{3j})\cdot 6j-6je^{3j}}{(6j)^3}=\frac{-18e^{3j}}{-216j}=\frac{e^{3j}}{12j}.\end{aligned}$$

Por el teorema de los residuos, se cumple que

$$\int_C f(z)dz=2\pi j\cdot\operatorname*{Res}_{z=3j}f(z)=2\pi j\cdot\frac{e^{3j}}{12j}=\frac{\pi e^{3j}}{6}.$$

c) La integral del enunciado se puede escribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{2}{2+\operatorname{sen} t}dt &= \int_0^{2\pi}\frac{2}{2+\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}}dt=\int_0^{2\pi}\frac{4j}{4j+e^{jt}-e^{-jt}}dt\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{4je^{jt}}{e^{2jt}+4je^{jt}-1}dt=\int_{|z|=1}\frac{4}{z^2+4jz-1}dz,\end{aligned}$$

donde $z = e^{jt}$, con $0 \le t \le 2\pi$, es una parametrización de la circunferencia $|z| = 1$, que tiene centro 0 y radio 1. Las singularidades de la función

$$g(z) = \frac{4}{z^2 + 4jz - 1}$$

son los ceros de $z^2 + 4jz - 1$:

$$z^2 + 4jz - 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-4j \pm \sqrt{-16+4}}{2} = \frac{-4j \pm 2\sqrt{3}j}{2} = -2j \pm \sqrt{3}j.$$

Los puntos $z_1 = (-2 - \sqrt{3})j$ y $z_2 = (-2 + \sqrt{3})j$ son ceros simples del polinomio $z^2 + 4jz - 1$ y, por tanto, son polos simples de g. Como z_1 se encuentra en el exterior de la circunferencia $|z| = 1$ y z_2 se encuentra en el interior, por el teorema de los residuos se cumple que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{2}{2 + \operatorname{sen} t} dt &= \int_{|z|=1} \frac{4}{z^2 + 4jz - 1} dz = 2\pi j \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_2} g(z) \\
&= 2\pi j \cdot \lim_{z \to z_2} (z - z_2) g(z) = 2\pi j \cdot \lim_{z \to z_2} \frac{4(z - z_2)}{z^2 + 4jz - 1} \\
&= \lim_{z \to z_2} \frac{8\pi j (z - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{8\pi j}{z_2 - z_1} = \frac{8\pi j}{2\sqrt{3}j} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$