Problemas del tema 1: Cálculo diferencial de funciones de varias variables reales.

1. a) Determina y representa el dominio de la función $\ln[(4 - x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2 - 1)]$

   b) Dibuja las curvas de niveles $0, 1, \ldots, 5$ y la representación gráfica de las siguientes funciones

      1) $f(x, y) = 5 - x - y$
      2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
      3) $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$

2. Calcular los límites direccionales de $f(x, y)$ en (0,0) y estudia si existe el límite de $f(x, y)$ en $(0, 0)$ en los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}$

   b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

   c) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$

3. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones de dos variables

   a) $x^2 + xy + 2x$

   b) $\ln(x^2 + y^2)$

   c) $y \cos(xy)$

   d) $\dfrac{1}{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}$

   e) $\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$

   Calcular los límites en la dirección $y = x$ en el punto (1,1) para las funciones de los apartados b) d) y e)

4. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcular $D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}f(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

b) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y la derivada direccional de f en (1,0) en la dirección (1,1).

c) ¿Es cierta la igualdad $\nabla f(0,0)\cdot\vec{h} = D_{\vec{h}}f(0,0)$ con $\vec{h} = (\cos(\theta),\ \operatorname{sen}(\theta))$?

d) Estudiar la diferenciabilidad de f

e) ¿Son continuas las derivadas parciales de f?

5. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

b) Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ a lo largo del vector $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

6. Hallar las derivadas parciales, vector gradiente y diferencial de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$

b) $f(x,y,z) = z\ e^{xy}$

c) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\ x_2 + x_3^2 x_4$

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ (es decir tiene derivadas parciales continuas en todo punto de $\mathbb{R}^2$), $\nabla f(2,1) = (1,1)$ y $f(2,1) = 5$, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ y $D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}\ f(2,1)$.

8. Sea $f(x,y) = 3\ - x/3 - y/3$.

a) Dibuja la gráfica de $f(x,y)$ en el primer octante.

b) Hallar la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto (3,2) en la dirección de argumento $\pi/4$.

c) Hallar el valor máximo de la derivada direccional de $f(x,y)$ en (3,2).

d) Hallar el polinomio de Taylor de primer orden de $f(x,y)$ centrado en (1,2).

e) Hallar un vector ortogonal a $\nabla f(3,2)$ y calcular la derivada de $f(x,y)$ en (3,2) en la dirección de este vector.

9. Dada la función $f(x,\ y) = Ln(x) - Ln(\text{sen}(y))$, calcula la ecuación del plano tangente a $z = f(x,\ y)$ en $(1,\ \frac{\pi}{4})$.

10. Hallar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2 - 2xy - z^3$ en el punto (1,-1,2) según la dirección del vector (-1,3,1).

    a) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?

    b) ¿Cuál es el valor de ese máximo?

11. Utilizar el polinomio de Taylor de orden n para desarrollar $x^3 + y^2 + xy^2$ en potencias de (x-1) e (y-2).

12. Calcular los puntos críticos y estudiar si son máximos, mínimos o puntos de silla de las siguientes funciones de dos variables

    a) $-x^3 + 6xy - 6x + 3y^2 - 6y$

    b) $x^2y + 2xy - y^2 - 3y$

    c) $x^4 + y^4$

    d) $x^4 - 2px^2 - y^2 + 3$ para los distintos valores de p

    e) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$

    f) $x^4 - y^4$