Tema 3: Integral doble

1. En cada una de las integrales siguientes, determina el recinto e invierte el orden de integración:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_1^3 f(x,y)dy$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

   (d) $\displaystyle\int_1^e dx \int_0^{\log x} f(x,y)dy$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dy$

2. Calcula la integral doble $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ en cada uno de los siguientes casos

   (a) $f(x,y) = x+y; \quad D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$

   (b) $f(x,y) = xy; \quad D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x\}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{4x^2-y^2}; \quad D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x\}$

   (d) $f(x,y) = x+y; \quad D = \{(x,y)/|x|+|y| \leq 1\}$

   (e) $f(x,y) = \text{máx}\{x,y\}; \quad D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1\}$

3. En el recinto $D = \{(x,y)/x^2+(y-1)^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$ se consideran las funciones $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $g(x,y) = \text{sen}(y-1)$

   (a) Expresa $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ e $\displaystyle\iint_D g(x,y)dxdy$ en los dos órdenes de integración posibles.

   (b) Calcula ambas integrales en el orden más adecuado.

4. Calcula la integral

$$\int_0^{\pi} dx \int_x^{\pi} \frac{\text{sen}\, y}{y} dy$$

5. (a) Demuestra, sin calcular la integral, que

$$4\pi \leq \iint_D (1+x^2+y^2)dxdy \leq 20\pi$$

   donde D es el círculo de radio 2 centrado en el origen.

(b) Si $f(x,y)=x^2y$ y $D=[0,2]\times[1,3]$, demuestra, sin calcular la integral, que $0\leq\iint_D f(x,y)dxdy\leq 48$

6. Sea $f(x,y)=k\,e^{-y^2}+x$, donde k es una constante real.

   Determinar el valor de la constante k para que:
   $\iint_D f(x,y)dx\,dy=1$, siendo $D=\{(x,y)/0\leq x\leq 1;\ x\leq y\leq 1\}$

7. Efectúa el cambio a coordenadas polares y calcula la integral $\iint_D x^2ydxdy$, donde

$$D=\{(x,y)/1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\}$$

8. Calcular la integral doble

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$$

   siendo:

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq y\leq 1,\ -y\leq x\leq y\}$$

9. Calcular la integral doble

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dx\,dy$$

   siendo $D=\{(x,y)\qquad 0\leq x\leq 1,\quad x^2+y^2\leq 1\}$

10. Considérese

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\int_{+\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}(x^3\ y+x^2+y^2)\ dy\right)dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}\left(\int_x^{+\sqrt{4-x^2}}(x^3\ y+x^2+y^2)\ dy\right)dx$$

    Se pide:

    a) Expresa e indica gráficamente la región de integración.

    b) Invierte el orden de integración.

    c) Realiza el cambio de variable a coordenadas polares para evaluar la integral.

11. Sea $D=D_1\cup D_2$, donde $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid 0\leq y\leq 1,\ y-1\leq x\leq 1-y\}$ y el el otro subconjunto es $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq 0\}$. Se pide:

    a) Esboza el dominio de integración.

    b) Expresa $\iint_D(1+x\ y)\ dx\ dy$ en los dos órdenes de integración posibles.

c) Calcula $\iint_D (1 + x\ y)\ dx\ dy$ utilizando coordenadas polares en el semicírculo del dominio.

12. Sea $R > 0,\ C_R$ el cuadrado $[-R,\ R] \times [-R,\ R]$ y D_R y $D_{R\sqrt{2}}$ los círculos de radio R y $R\sqrt{2}$ respectivamente, centrados en el origen.

    a) Calcular:
    $$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$
    $$\iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

    b) Demostrar que
    $$\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx\right)^2$$

    c) Razonar que se cumplen las siguientes desigualdades:
    $$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

    d) Deducir de (c) el valor de
    $$\lim_{R\to\infty} \iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$
    y utilizar el apartado (b) para calcular el valor de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

13. Haciendo uso de la integral doble, calcula el área de los siguientes recintos

    (a) $D = \{x \leq y \leq 2 - x^2\}$

    (b) $D = \{(x, y)/\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$