ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
FINAL (Convocatoria de Julio 2015) **Duración:** 3 horas
FECHA: 25 de Junio de 2015
Fecha publicación notas: 29 de Junio de 2015
Fecha revisión examen: 10 de Julio de 2015
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1.5 puntos) Una empresa efectúa operaciones comerciales en 3 mercados (A, B y C). El 20 % de sus operaciones las realiza en el mercado A y en los mercados B y C realiza exactamente el mismo número de operaciones. El porcentaje de operaciones en las que se producen retrasos en el pago es del 10, 15 y 5 % en los mercados A, B y C, respectivamente.*

(a) *¿En qué porcentaje de operaciones de la empresa no se producen retrasos en el pago?*

Solución.

$$P(\overline{R}) = P(\overline{R}/A)P(A) + P(\overline{R}/B)P(B) + P(\overline{R}/C)P(C) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.85 \cdot 0.4 + 0.95 \cdot 0.4 = 0.9$$

(b) *¿Qué porcentaje de las operaciones en las que se ha retrasado el pago han sido realizadas en el mercado B?*

Solución.

$$P(B/R) = \frac{P(B \cap R}{P(R)} = \frac{P(R/B)P(B)}{P(R)} = \frac{0.15 \cdot 0.4}{1 - 0.9} = 0.6$$

(c) *Elegida una operación al azar, ¿qué probabilidad hay de que no tenga retraso en el pago y corresponda al mercado A o C?*

Solución.

$$\begin{aligned} P(\overline{R} \cap (A \cup C)) =& P((\overline{R} \cap A) \cup (\overline{R} \cap C)) = P(\overline{R} \cap A) + P(\overline{R} \cap C) - P(\overline{R} \cap A \cap C) \\ =& P(\overline{R}/A)P(A) + P(\overline{R}/C)P(C) - P(\emptyset) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.95 \cdot 0.4 - 0 = 0.56 \end{aligned}$$

(d) *Si una operación no ha sufrido retraso en el pago, ¿cuál es la probabilidad de que corresponda a uno de los dos mercados A o C?*

Solución.

$$P((A \cup C)/\overline{R}) = \frac{P((A \cup C) \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{0.56}{0.9} = 0.622$$

Ejercicio 2 *(1.5 puntos) Se escogen aleatoriamente y de forma independiente ocho números reales del intervalo* $(0,1)$.

(a) *Calcula la probabilidad de que los cuatro primeros números sean menores que* 0.25 *y los cuatro últimos sean mayores que* 0.25.

Solución.

Sea X_i la abscisa del número escogido en el lugar i, $\quad i = 1, 2, \ldots 8$.

Denotamos por A_i el suceso $(X_i < 0.25)$.

$$X_i \sim U(0,1)$$

Por ser X_i variables aleatorias independientes y por estar idénticamente distribuidas,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_6} \cap \overline{A_7} \cap \overline{A_8}) &= [P(A_i)]^4 [P(\overline{A_i})]^4 = [P(X_i < 0.25]^4 \cdot [P(X_i > 0.25]^4 \\ &= 0.25^4 \cdot 0.75^4 = 0.0012 \end{aligned}$$

(b) *Calcula la probabilidad de que cuatro números sean menores que* 0.25 *y cuatro mayores que* 0.25.

Solución.

Sea X la variable aleatoria que cuenta cuántos números, de los 8 elegidos, son menores que 0.25.

$X \sim Bin(n = 8, p = 0.25)$

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} 0.25^4 \cdot 0.75^4 = 70 \cdot 0.0012 = 0.0865$$

(c) *Calcula la probabilidad de que los tres primeros números sean menores que* 0.25*, los dos siguientes estén entre* 0.25 *y* 0.75 *y los tres últimos sean mayores que* 0.75.

Solución.

Denotamos por A_i, B_i y C_i los sucesos $(X_i < 0.25)$, $(0.25 < X_i < 0.75)$ y $(X_i > 0.75)$, respectivamente, con $i = 1, 2, \ldots, 8$.

Por ser X_i variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap B_4 \cap B_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8) &= [P(A_i)]^3 [P(B_i)]^2 [P(C_i)]^3 \\ &= [P(X_i < 0.25)]^3 [P(0.25 < X_i < 0.75)]^2 [P(X_i > 0.75)]^3 \\ &= 0.25^3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25^3 = 0.000061 \end{aligned}$$

(d) *Calcula la probabilidad de que tres números sean menores que* 0.25*, dos estén entre* 0.25 *y* 0.75*, y tres sean mayores que* 0.75.

Solución.

Sea X_1 la variable aleatoria que mide el número de veces que ocurre A_i.

Sea X_2 la variable aleatoria que mide el número de veces que ocurre B_i.

Sea X_3 la variable aleatoria que mide el número de veces que ocurre C_i.

$$(X_1, X_2, X_3) \sim Mult(n = 8, p_1 = 0.25, p_2 = 0.5, p_3 = 0.25)$$

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2, X_3 = 3) = \frac{8!}{3!2!3!} \cdot 0.25^3 \cdot 0.5^2 \cdot 0.25^3 = 0.034$$

Ejercicio 3 *(1 punto) Sea n un número entero y sea X una variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}, & 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcula $E[X]$ y $\mathrm{VAR}(X)$.

Solución.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{n}{2}\int_0^2 x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{2^n} \cdot \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^2 = \frac{2n}{n+1}$$

$$\mathrm{VAR}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{n}{2}\int_0^2 x^2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{2^n} \cdot \left.\frac{x^{n+2}}{n+2}\right|_0^2 = \frac{4n}{n+2}$$

$$\mathrm{VAR}(X) = \frac{4n}{n+2} - \frac{4n^2}{(n+1)^2} = \frac{4n}{(n+1)^2(n+2)}$$

Sea $Y = \frac{n+1}{n} \cdot X$

(b) Calcula $E[Y]$ y $\mathrm{VAR}(Y)$.

Solución.

$$E(Y) = E\left[\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot X\right] = \frac{n+1}{n} \cdot E(X) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n}{n+1} = 2$$

$$\mathrm{VAR}(Y) = \mathrm{VAR}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot X\right] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \mathrm{VAR}(X) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{4n}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{4}{n(n+2)}$$

Ejercicio 4 *(1 punto) Los tiempos, X e Y, que tardan dos estudiantes A y B en resolver un problema, son independientes y ambos tienen distribución exponencial con parámetro λ.*

(a) Calcula la función de densidad conjunta de (X, Y).

Solución.

Por ser X e Y independientes,

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} & \text{si} \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & \text{si} \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(b) *Calcula la probabilidad de que el estudiante A requiera por lo menos el doble de tiempo que el estudiante B para resolver el problema.*

Solución.

$$P(X \geq 2Y) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x/2} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}\, dy = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_0^{x/2} \lambda e^{-\lambda y}\, dy \right) dx$$

$$\int_0^{x/2} \lambda e^{-\lambda y}\, dy = -e^{-\lambda y}\Big|_0^{x/2} = 1 - e^{-\lambda x/2}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2Y) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left(1 - e^{-\lambda x/2}\right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-3\lambda x/2}\, dx \\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + e^{-3\lambda x/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_0^{+\infty} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(1 punto) Sean X e Y variables aleatorias independientes ambas con distribución normal de parámetros $\mu_X = 6$, $\sigma_X^2 = 1$, y $\mu_Y = 7$, $\sigma_Y^2 = 2$. Calcula $P(X > Y)$.*

Solución.

$$X \sim N(\mu_X = 6, \sigma_X^2 = 1), \quad Y \sim N(\mu_Y = 7, \sigma_Y^2 = 2)$$

Por ser X e Y normales independientes, (X, Y) sigue una distribución normal bidimensional, siendo X e Y variables aleatorias incorrelacionadas.

Entonces,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

Como

$$X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

resulta que $X - Y$ sigue una distribución normal cuya media es

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = -1$$

y cuya varianza es,

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0) = P(Z > 1/\sqrt{3}) = 1 - \Phi_Z(1/\sqrt{3}) = 1 - \Phi_Z(0.57) = 0.2843$$

Donde Φ_Z es la función de distribución de la variable aleatoria normal de media 0 y varianza 1.

Ejercicio 6 *(1 punto) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$. Utiliza el teorema central del límite para obtener el valor más pequeño de n tal que*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - 1\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9$$

Solución.

Sabemos que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1$, en consecuencia: $E[X_i] = 1$ y $\mathrm{VAR}(X_i) = 1$, $i = 1, 2 \ldots, n$. Así pues

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n$$
$$\mathrm{VAR}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{VAR}(X_i) = n$$

El Teorema Central del Límite afirma que

$$Z = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n}{\sqrt{n}}$$

sigue, aproximadamente, una distribución normal de media 0 y varianza 1.

La desigualdad del enunciado es equivalente a

$$P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{n}\right| \leq 0.1\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}}\right| \leq \sqrt{n} \cdot 0.1\right) \geq 0.9$$

y aplicando el Teorema central del límite resulta

$$P\left(|Z| \leq \sqrt{n} \cdot 0.1\right) \geq 0.9$$

Por tanto

$$2\Phi_Z(\sqrt{n} \cdot 0.1) - 1 \geq 0.9 \Leftrightarrow \Phi_Z(\sqrt{n} \cdot 0.1) \geq 0.95$$

Consultando las tablas resulta finalmente

$$\sqrt{n} \cdot 0.1 = 1.65$$

es decir, $n \geq (1.65)^2 10^2 = 272.25$, y el valor buscado de n es 273

Ejercicio 7 *(1.5 puntos) De una muestra de tamaño* 18 *de una población normal, se ha obtenido la siguiente media y cuasivarianza muestral* $\bar{x} = 26.82$, $s_1^2 = 61.23$.

Nota: *Sea* X *una variable aleatoria con distribución t de Student con 17 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

x	*0.53*	*0.86*	*2.59*	*2.89*
$P(X \leq x)$	*0.7*	*0.8*	*0.99*	*0.995*

Nota: *Sea* Y *una variable aleatoria con distribución Chi cuadrado con 17 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

y	*7.25*	*13.45*	*20.81*	*30.99*
$P(Y \leq y)$	*0.02*	*0.29*	*0.76*	*0.98*

(a) Calcula un intervalo de confianza al 99 % *para la media de la población.*

Solución.

El intervalo de confianza para la media al 99 % es

$$(\bar{x} - q_{0.995} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + q_{0.995} \cdot \frac{s_1}{\sqrt{n}})$$

donde $q_{0.995}$ es el cuantil de orden 0.995 de una t_{17}.

Sustituyendo y operando resulta

$$\left(26.82 - 2.89 \cdot \sqrt{\frac{61.23}{18}},\ 26.82 + 2.89 \cdot \sqrt{\frac{61.23}{18}}\right) = (21.48, 32.15)$$

(b) ¿Podemos admitir, con un nivel de significación $\alpha = 0.04$*, que la varianza de la población es* $\sigma^2 = 50$*? ¿Cuál es el p-valor del contraste?*

Solución.

Realizamos el siguiente contraste de hipótesis

$H_0 : \sigma^2 = 50$

$H_1 : \sigma^2 \neq 50.$

$\alpha = 0.04$

Si H_0 es cierta,

$$T = \frac{(n-1)S_1^2}{50} \sim \chi^2_{n-1}$$

El valor de T en la muestra es

$$\frac{17 \cdot 61.23}{50} = 20.81$$

$q_{0.02}$ y $q_{0.98}$ son los cuantiles de orden 0.02 y 0.98 de una χ^2_{17}, así pues el intervalo de aceptación será

$$(q_{0.02},\ q_{0.98}) = (7.25, 30.99)$$

Se acepta H_0 pues $20.81 \in (7.25, 30.99)$.

El p-valor del contraste es:

$$\text{p-valor} = 2 \cdot \text{mín}\{P(\chi^2_{17} > 20.81),\ P(\chi^2_{17} < 20.81)\} = 2 \cdot \text{mín}\{0.24,\ 0.76\} = 0.48$$

Se acepta la hipótesis nula $\forall \alpha < 0.48$.

Ejercicio 8 *(1 punto) El número de accidentes de tráfico que se producen en una ciudad en el intervalo* $[0, t)$ *es un proceso de Poisson de tasa* $\lambda = 14$ *accidentes por semana. Si se sabe que en una semana han ocurrido siete accidentes, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra exactamente un accidente cada día de esa semana?*

Solución.

Sabemos que el número de accidentes de tráfico que ocurren en una ciudad en el intervalo $[0, t)$ es un proceso de Poisson de tasa 14 accidentes por semana, por tanto, para cada valor de t, en semanas, $N(t) \sim \text{Pois}(14t)$, es decir

$$P(N(t) = i) = e^{-14t}\frac{(14t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

El número de accidentes que ocurren en un día tiene igual distribución que $N(1/7)$, luego
$N(1/7) \sim \text{Pois}(2)$

$N(d/7) - N((d-1)/7)$ representa el número de accidentes que ocurren el día d de la semana, $d = 1, 2, \ldots, 7$, $N(0) = 0$, por ser un proceso de Poisson, son independientes, están idénticamente distribuidas y tiene igual distribución que $N(1/7)$.

Nos piden

$$\begin{aligned}
P\left(\cap_{d=1}^{7}[N(d/7) - N((d-1)/7) = 1]/N(1) = 7\right) =& \frac{P\left(\cap_{d=1}^{7}[N(d/7) - N((d-1)/7) = 1] \cap N(1) = 7\right)}{P(N(1) = 7)} \\
=& \frac{P\left(\displaystyle\bigcap_{d=1}^{7}[N(d/7) - N((d-1)/7) = 1]\right)}{P(N(1) = 7)} \\
=& \frac{\displaystyle\prod_{d=1}^{7} P\left(N(d/7) - N((d-1)/7) = 1\right)}{P(N(1) = 7)} \\
=& \frac{\left(\mathrm{e}^{-2}\cdot 2\right)^7}{\mathrm{e}^{-14}\cdot\frac{14^7}{7!}} = \frac{7!}{7^7} \simeq 0.0061
\end{aligned}$$

Ejercicio 9 *(0.5 puntos) Sea* $X(t)$ *un proceso estacionario, con densidad espectral* $S_X(\omega) = \dfrac{4}{4+\omega^2}$ *y sea* $Y(t)$ *la respuesta de un sistema lineal a la entrada* $X(t)$*, siendo* $H(\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega}$ *la función de transferencia del sistema.*

Calcula la potencia media de $X(t)$ *y la densidad espectral de* $Y(t)$*.*

Solución.

La potencia media de X es

$$\begin{aligned}
Pot(X) =& \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{4+\omega^2}\,d\omega \\
=& \frac{1}{\pi}\,\text{arc tg}\,\frac{\omega}{2}\Big]_{-\infty}^{\infty} = 1
\end{aligned}$$

La densidad espectral de Y es

$$\begin{aligned}
S_Y(\omega) =& \mid H(\omega)\mid^2 \cdot S_X(\omega) \\
=& \left|\left(\frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{\omega}{1+\omega^2}\right)\right|^2 \cdot \frac{4}{4+\omega^2} \\
=& \frac{1}{1+\omega^2}\cdot\frac{4}{4+\omega^2}
\end{aligned}$$