Capítulo 5

Series de potencias y de funciones

5.1. Sucesiones de funciones

En los dos últimos capítulos de la asignatura, deseamos estudiar ciertos tipos de *series de funciones*, es decir, expresiones sumatorias infinitas en las que cada uno de los sumandos es una función:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

La definición de una serie de funciones suele hacerse pasar por la de una *sucesión de funciones* como se hizo con series numéricas. Una sucesión de funciones es un conjunto *ordenado* de funciones

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x), \ldots\}.$$

Ejemplo 5.1. Una progresión geométrica de razón x

$$\{x^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3 \ldots, x^n, \ldots\} \tag{5.1}$$

Una sucesión de números tiene, si converge, un límite que es un número. La idea es que una sucesión de funciones tenga como límite una función

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

El problema es que esa función límite puede no compartir las propiedades de las funciones que componen la sucesión y, ¿ cómo se obtiene ? Dando un valor numérico a x en una sucesión de funciones, se obtiene una sucesión numérica. La función límite $f(x)$ para una $x = x_0$ concreta es el valor del límite de la sucesión numérica $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ habiendo sustituido en cada término $f_n(x)$ el valor de x por x_0.

Ejemplo 5.2. Veamos qué función límite tiene la progresión geométrica de razón variable x (5.1) del ejemplo 5.1:

$$\{x^n\}_{n=0}^{\infty} = \{1, x, x^2, x^3 \ldots, x^n, \ldots\}$$

Sabemos que una progresión geométrica (la sucesión, no la suma) converge a cero si su razón, en este caso x, es de valor absoluto menor que la unidad $|x| < 1$. Si es de valor absoluto mayor a 1, la sucesión diverge. Si la razón es la unidad, la sucesión tiende a 1, y si la razón es -1, la sucesión es oscilante y no converge. Por tanto, la función límite de la progresión geométrica es

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \text{no existe} & \text{en } \mathbf{R} - (-1, 1] \end{cases}$$

El ejemplo anterior nos muestra cuál puede ser el problema de las sucesiones de funciones: a pesar de que las funciones componentes de la sucesión tienen buenas propiedades, la función suma no es tan regular. En este caso los términos de la sucesión son potencias x^n que son infinitamente derivables en todo $\mathbf{R}$ y la función suma no es ni derivable, ni continua y ni siquiera está bien definida en todo $\mathbf{R}$.

El tipo de convergencia que acabamos de describir se denomina *convergencia puntual* de una sucesión de funciones. La convergencia puntual, entonces, no preserva las propiedades de regularidad de las funciones de la sucesión, se pueden perder todas las propiedades que tanto nos han ayudado en el Análisis. Se puede decir que ello es debido a que no existe la conmutatividad entre el límite $\lim_{n\to\infty}$ de sucesión de funciones y el límite funcional $\lim_{x\to x_0}$:

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

En el ejemplo 5.2

$$\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Como consecuencia de que el límite de la suma no es la suma de los límites, el límite de la derivada no es la suma de las derivadas, o de la integral, el de las integrales, por ejemplo.

Hay un tipo de convergencia, denominado convergencia uniforme, que sí preserva algunas propiedades de regularidad de las funciones de la sucesión en el límite. Pero su estudio detallado queda fuera del alcance de esta asignatura (ver la referencia de Spivak [1] para más información)

5.2. Series de funciones

Para definir el sentido de las *series de funciones*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

se procede de la misma manera que para definir el concepto de serie numérica. Se define la suma como la función $S(x)$ límite de sucesión de funciones $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ formada por las sumas parciales

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_{n-1}(x) + f_n(x)$$

El concepto de convergencia puntual se extiende automáticamente a series: el valor $S(x_0)$ en un $x = x_0$ determinado es el valor de la *serie numérica* obtenida evaluando cada una de las funciones $f_n(x)$ en x_0:

$$\begin{aligned} S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x_0 \mapsto S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0). \end{aligned}$$

Sabemos que el límite de una sucesión de funciones es una función con propiedades que pueden ser muy diferentes a la de los términos. La sumación de infinitas funciones puede dar lugar a situaciones poco intuitivas. Lo primero que hay que determinar es la *región de convergencia* (o dominio, campo, etc. de convergencia) de una sucesión/serie de funciones, que no es más que el subconjunto de $\mathbf{R}$ en el cual la sucesión/serie converge puntualmente.

Ejemplo 5.3. En este ejemplo construimos una serie cuyas sumas parciales son la sucesión del ejemplo 5.1. Sea

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1}) = 1+(x-1)+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots$$

Las sumas parciales son

$$S_0(x)=1, \quad S_n(x)=1+\sum_{i=1}^{n}(x^i-x^{i-1}) = x^n \text{ (si } n\geq 1 \text{)}$$

y podemos ver que la función suma es

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1<x<1 \\ 1, & \text{si } x=1 \\ \text{no está definida} & \text{si } x\notin(-1,1] \end{cases}$$

5.3. Series de potencias

Hemos estado a punto de encontrarnos con las series de funciones en el capítulo de los polinomios de Taylor. Por ejemplo, podríamos tener la tentación de prolongar el siguiente polinomio de Taylor (con resto)

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad T_n(f)(x) = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+R_n(f)(x)$$

haciendo tender n a infinito. Nos apoya el hecho de que ya hemos demostrado una fórmula para esta suma, que es la suma de la progresión geométrica

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Pero debemos tener cuidado: esta expresión no es válida si $|x|\geq 1$. Estudiando la convergencia puntual vemos que fuera del intervalo $x\in(-1,1)$ la serie es puntualmente divergente, al no cumplirse la condición del resto[*] ¡ La suma de la serie no es igual en todos los sitios a la función dada !

[*]en el ejemplo 5.2, estudiamos la sucesión de los términos que ahora estamos sumando, y vimos que para $|x|>1$ iban en valor absoluto a infinito, y para $x=1$ tienden a 1. Sólo en $(-1,1)$ tienden a cero.

Inspirados por el teorema de Taylor, debemos estudiar las series de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

que son las denominadas *series de potencias.* La serie anterior se dice que está *centrada* en x_0, o que es una serie de potencias en $x - x_0$.

El primer paso en el estudio de series de potencias es determinar su región de convergencia. Usando el criterio de comparación con una serie geométrica, podemos demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5.4 (Abel)**.** *Dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si es convergente para un valor $x = a$, entonces es convergente para todo valor $|x| < a$. Recíprocamente, si la serie de potencias diverge para un valor $x = b$, entonces también diverge para todo $|x| > b$.*

Demostración. La condición del resto implica que $a_n a^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego existe cierto N a partir del cual $|a_n a^n| < M$ para un M dado. Entonces

$$|a_n x^n| = |a_n a^n| \left|\frac{x}{a}\right|^n < M \left|\frac{x}{a}\right|^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{a}\right|^n$$

siendo la última serie una geométrica de razón menor que 1 (si $|x| < |a|$). Por el criterio de comparación se concluye que la serie original es (absolutamente) convergente, pudiéndose ver (aplicando la definición) que es también uniformemente convergente (en el cerrado $|x| \leq |a|$). La segunda parte es evidente, ya que si la serie diverge para $x = b$, no puede converger para $x = a$ con $|a| > |b|$, ya que la primera parte del teorema implicaría que converge también en $x = b$. □

Del teorema 5.4 se deduce que, dada una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, existe un número R tal que si $|x - x_0| < R$, la serie es convergente y si $|x - x_0| > R$, la serie es divergente. Las condiciones anteriores equivalen a decir que para todos los valores de x en el interior de un entorno de radio R centrado en x_0, la serie de potencias es convergente, y es divergente en el exterior. Por ello, al número R se le denomina **radio de convergencia** de la serie. Hay que observar que no existen reglas generales de convergencia en los extremos $x = x_0 - R,\ x_0 + R$ de la bola.

Ejemplo 5.5. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

diverge en $x = 1$ y converge en $x = -1$, luego tiene radio de convergencia $R = 1$, y converge en $[-1, 1)$.

El radio de convergencia se puede calcular en la mayoría de los casos prácticos, usando el criterio del cociente o de la raíz. A veces se puede calcular directamente con las siguientes fórmulas.

Proposición 5.6. *Si, dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, existe alguno de los límites**

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad ó \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{5.2}$$

entonces su valor es el del radio de convergencia.

Demostración. Sendos límites se encuentran al aplicar el criterio del cociente o de la raíz. Hagamos el primer caso:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R} \Rightarrow \begin{cases} \text{convergente si } |x| < R \\ \text{divergente si } |x| > R \end{cases}$$

□

Ejemplo 5.7. El radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}(x+2)^n$$

se puede calcular con el cociente

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2^n n}\frac{2^{n+1}(n+1)}{(-1)^n}\right| = 2$$

luego la serie converge absolutamente en $|x+2| < 2 \iff x \in (-4, 0)$ y diverge en $(-\infty, -4) \cup (0, \infty)$. ¿ Y en $x = -4$ y $x = 0$?

Ejemplo 5.8. El radio de convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^n}(x-2)^n$$

se puede calcular con la fórmula de la raíz

$$R = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

y resulta que la serie de potencias dada converge en todo **R**.

*Se puede siempre definir $R^{-1} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ (ver definición 1.32 ó [1] p. 702)

En muchas ocasiones en que los límites (5.2) no existen, se puede calcular el radio de convergencia.

Ejemplo 5.9. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n x^{2n}$$

tiene como radio de convergencia $1/\sqrt{r}$. Hay que poner atención a que la numeración de los coeficientes ($a_n = r^{n/2}$ si n par, $a_n = 0$ si n impar) hace inaplicable la fórmula del cociente. Se puede aplicar directamente el criterio del cociente (de series numéricas) obteniendo:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{r^{n+1}x^{2n+2}}{r^n x^{2n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|rx^2\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 < 1/r.$$

También se puede hacer el cambio de variables $y = x^2$, considerando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n y^n$ de radio de convergencia $1/r$. Esto implica que $x^2 = y < 1/r$ concluyéndose el mismo resultado para x.

La convergencia de una serie de potencias es uniforme en el interior de su intervalo de convergencia. Esto implica que cualquier función $f(x)$ definida por una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{5.3}$$

tiene que tener una gran regularidad, al ser los términos $a_n x^n$ funciones muy regulares. Se puede demostrar el siguiente teorema.

Teorema 5.10. *La función* (5.3) *dada por una serie de potencias, en el intervalo de convergencia* $(-R, R)$

1. *es continua,*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to c} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n = f(c),$$

2. *es integrable (al ser continua) y su integral es la serie integral, que tiene el mismo radio de convergencia*

$$\int f(x)\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int a_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

3. *es derivable, y su derivada es la serie derivada, que tiene el mismo radio de convergencia*

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

El teorema anterior se puede generalizar al caso de una serie centrada en un punto $x_0 \neq 0$, sustituyendo x por $x - x_0$.

Las funciones representables por series de potencias son, entonces, continuas e incluso infinitamente diferenciables, en el intervalo de convergencia.

Ejemplo 5.11. Siempre que $|x| \le 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots, \\
-\ln(1-x) &= c + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n+1}x^{n+1} + \cdots \quad (c = 0) \\
&\Downarrow \\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + \tfrac{1}{n}x^n + \cdots \\
&\Downarrow \\
\ln 2 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n} + \cdots
\end{aligned}$$

La serie de $\ln 2$ es la serie de potencias evaluada en el extremo del intervalo de integración, pero como vimos en el ejemplo 4.33, es convergente por ser una serie de Leibniz*.

5.4. Series de Taylor

El denominado *problema de sumación* de una serie de potencias consiste en averiguar si la función suma de una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

*Sin embargo, es el extremo de la región de convergencia, con lo que se debe acudir al segundo Teorema de Abel (que no hemos estudiado) para asegurar que el desarrollo es continuo ahí.

es una función conocida. Hemos deducido en el apartado anterior que esta función, en el intervalo de convergencia $(x_0 - R, x_0 + R)$, es infinitamente diferenciable, con todas sus derivadas continuas. Sustituyendo $x = x_0$ y derivando la serie, queda claro cómo averiguar el valor de la función y de cualquier derivada suya en el punto central x_0:

$$f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = a_1,\ f''(x_0) = 2a_2,\ \dots\ , f^{(n)}(x_0) = n!a_n,\ \dots$$
$$\Rightarrow\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \tag{5.4}$$

Como es lógico, los coeficientes de la serie de potencias obedecen la misma fórmula que los coeficientes del polinomio de Taylor de la función $f(x)$.

Proposición 5.12. *Si una función $f(x)$ coincide, en cierto intervalo no puntual, con la suma de una serie de potencias, esta serie es única.*

Este resultado es casi evidente, puesto que los coeficientes deben satisfacer la fórmula de Taylor (5.4) (obsérvese, sin embargo, que al deducirla hemos derivado, para legitimar lo cual es necesario que la igualdad de la función y la serie sea válida en un entorno de x_0) Es decir, dos series de potencias distintas de radio de convergencia no nulo originan dos funciones distintas. En particular, la función cero solo se puede representar con la serie cero, luego es cierta la deducción

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \Rightarrow \quad a_n = 0 \quad \forall n.$$

Ejemplo 5.13. Las series de potencias de radio de convergencia nulo, sin embargo, no representan ninguna función:

$$1 + x + 4x^2 + 27x^3 + \cdots + n^n x^n + \cdots$$
$$1 + x + 16x^2 + 7.625.597.484.987x^3 + \cdots + n^{n^n} x^n + \cdots$$

El *problema del desarrollo*, es decir, dada una función $f(x)$ obtener una serie de potencias cuya suma sea $f(x)$, es el inverso del problema de la sumación. Podría parecer que lo hemos resuelto ya, simplemente mediante la fórmula de Taylor, generando un polinomio de Taylor de infinitos términos, es decir, una *serie de Taylor*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

Sin embargo, puede haber problemas: la serie de Taylor puede diverger en todo punto* (menos en x_0) como las series del ejemplo 5.13. Y hay una posibilidad

*Hay un ejemplo en [5].

peor: la serie de Taylor puede ser convergente, pero su suma puede ser ¡ distinta de la función que la originó !

Ejemplo 5.14. Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{cuando } x \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } x = 0 \end{cases}$$

Las derivadas de esta función en $x = 0$ se pueden calcular apelando a la continuidad y a la igualdad de la derivadas laterales, sucesivamente para cada derivada. ¡ Resultan ser todas nulas ! Su polinomio de Taylor es por lo tanto nulo, así que coincide con el de, por ejemplo, la función 0. Esto quiere decir que $f(x)$ está representada por su polinomio de Taylor solo en el punto central, $x_0 = 0$, para no contradecir a la proposición 5.12.

En el ejemplo anterior, la función es igual al resto del polinomio de Taylor (ver el teorema 1.148) de cualquier orden. Lógicamente, si el resto de Taylor no tiende a ser cero cuando $n \to \infty$, la serie de potencias no puede converger.

Teorema 5.15. *La condición necesaria y suficiente para que una serie de Taylor coincida con la función $f(x)$ que la genera, es que el resto de Taylor*

$$R_n(f, x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad c \in (x_0, x)$$

tienda a 0 cuando $n \to \infty$.

Como conclusión, en esta sección hemos visto que las series de Taylor representan funciones con unas propiedades de regularidad excelentes. Estas funciones se denominan *funciones analíticas*. Lógicamente, no todas las funciones son analíticas, incluso si tienen infinitas derivadas continuas, y pueden originar una serie de Taylor. Estas últimas serán analíticas solo si satisfacen el teorema anterior, y en ese caso su valor coincide con la suma de la serie de Taylor en el intervalo de convergencia.

5.5. Series de Taylor importantes

Serie geométrica.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1$$

Serie binomial.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \begin{cases} x \in \mathbf{R} & \text{si } \alpha = 0,1,2,\ldots \\ |x| < 1 & \text{si } \alpha \neq 0,1,2\ldots \end{cases}$$

La progresión geométrica es un caso particular de la binomial.

Serie exponencial.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbf{R}$$

Series trigonométricas.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbf{R}$$

Ejercicio 5.16. Deducir la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Serie logarítmica.

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Series hiperbólicas.

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbf{R}$$

¡ Resulta que $\operatorname{ch} x = \cos \mathrm{i}x$ y $\operatorname{sh} x = -\mathrm{i} \operatorname{sen} \mathrm{i}x$!

Se pueden realizar muchas operaciones con las series de potencias (aunque alguna es difícil de demostrar en este momento) :

- multiplicación por una constante,
- suma, diferencia,
- producto, cociente,
- derivación, integración,
- composición.

El radio de convergencia del resultado de la operación puede diferir de los radios de convergencia de las series de partida.

Las series de Taylor suelen obtenerse utilizando estas operaciones sobre las series de funciones conocidas. En último extremo, si una función a desarrollar no se puede poner en términos de funciones elementales, siempre podemos recurrir a la fórmula de Taylor para deducir los coeficientes de la serie.

Ejemplo 5.17.

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2} &= \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) dx \\ &= x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{arc\,sen} x = \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n} + \cdots\right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots 2n{-}1}{2^n\cdot n!}x^{2n} + \cdots\right) dx \\ &= \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots 2n{-}1}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots\right) dx \\ &= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots (2n{-}1)}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots\end{aligned}$$

definiéndose $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n n! = (2n)!/(2n-1)!!$. Si se define $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = (2n-1)!/2^{n-1}$:

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!2^n n!(2n+1)} = \binom{2n-1}{n}\frac{1}{2^{2n-1}(2n+1)}$$